

北京邮电大学 2014—2015 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (B 卷)

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 40 分，每小题 4 分)

1. 设  $A, B$  为相互独立的随机事件,  $P(A)=0.8$ ,  $P(\bar{A}B)=0.4$ , 则  $P(B|A)=$  0.5.
2. 将一个表面涂有颜色的正方体等分为 1000 个小正方体, 从这些小正方体中任取一个. 令  $X$  表示所取的小正方体含有颜色的面数,  $P\{X=2\}=\frac{96}{1000}$ .
3. 常数  $C=\frac{1}{e^\lambda-1}$  可使得  $p_k=C\frac{\lambda^k}{k!}$ , ( $k=1, 2, \dots$ ) 为某一离散型随机变量  $X$  的分布列, 其中  $\lambda>0$  为参数.
4. 设随机变量  $X \sim N(1, 4)$ ,  $Y$  服从参数为 1 的泊松分布, 则  $E(4X+2Y-2)=$  4.
5. 设  $X_1, X_2, \dots$  为相互独立的随机变量序列, 且  $X_i$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布,  $i=1, 2, \dots$ ,

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = \Phi(x)$$

6. 设总体  $X$  的密度函数为  $f(x)=\begin{cases} |x| & \text{若 } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_{50})$  是从  $X$  中抽取的一个样本, 则  $E(\bar{X})=$  0.

7. 设二维正态随机变量  $(X, Y)$  的边缘分布  $X \sim N(1, 4)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$ , 且相关系数

$$\rho_{XY}=0. \text{ 则概率 } P\{X+Y < 1\} = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

8. 设  $(X_1, X_2)$  是取自正态总体  $N(0, \sigma^2)$  中的一个样本. 则  $Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$  服从  $F(1, 1)$

分布。(指出分布及参数)

9. 设某种材料干燥时间  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (单位: 小时), 取  $n=9$  的样本, 得样本均值为  $\bar{X}=6$ , 若由以往经验知  $\sigma=0.6$  (小时), 则  $\mu$  的置信水平为 95% 的置信区间为 (5.608, 6.392). (保留小数点 3 位)

10. 设总体  $X$  等可能地取值  $1, 2, 3, \dots, N$ , 其中  $N$  是未知的正整数.  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自该总体中的一个样本, 则  $N$  的最大似然估计量为  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  或  $x_{(n)}$ .

二、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{其它} \end{cases},$$

并且已知  $E(X)=\frac{1}{2}$ , 试求方差  $D(X)$ .

解:

$$\text{由 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \text{ 及 } E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}, \text{ 得}$$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 (ax+bx^2)dx=\frac{a}{2}+\frac{b}{3},$$

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x(ax+bx^2)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}.$$

$$\text{可得线性方程组 } \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b}{3}=1 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}=\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ 解得 } a=6, b=-6. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{所以, } E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2 (6x-6x^2)dx=6 \cdot \frac{1}{4}-6 \cdot \frac{1}{5}=\frac{3}{10},$$

$$\text{所以, } D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3}{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{20}. \quad (4 \text{ 分})$$

三、(13 分) 设射击的圆形屏幕的半径为 1, 射中点的坐标为  $(X, Y)$ , 射中点在屏幕上均匀出现,

求 (1)  $X, Y$  是否相互独立, (2)  $X, Y$  是否不相关, (3) 条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$ .

解：(1)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 < 1; \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

当  $-1 < x < 1$  时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi},$$

$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & |x| < 1; \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$-1 < y < 1$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi};$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & |y| < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \text{不相互独立.} \quad (5 \text{ 分})$$

(2)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 < 1} \frac{x}{\pi} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{\pi} dx dy = 0$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = 0$$

$$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 < 1} \frac{xy}{\pi} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{xy}{\pi} dx dy = 0$$

$$EXY = EXEY, \text{X 与 Y 是不相关的.} \quad (5 \text{ 分})$$

(3)  $-1 < y < 1,$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

四、(12 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (1)  $Z = 2X + Y$  的分布函数和概率密度。(2) 期望  $E(Z)$ 。

解：(1)

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

由分布函数的定义有  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(2X + Y \leq z) = \iint_{2x+y \leq z} f(x, y) dx dy \quad (2 \text{ 分})$

当  $z < 0, F_Z(z) = 0;$

当  $0 \leq z < 2, F_Z(z) = \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}$

当  $z \geq 2, F_Z(z) = \int_0^1 dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = 1 - \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-z}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-z}) & 0 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2}(e^{-z+2} - e^{-z}) & z \geq 2 \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

(2) 期望  $E(Z) = 2E(X) + E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2. \quad (2 \text{ 分})$

五、(15 分) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x) & , 0 < x < \theta \\ 0 & , \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  是未知参数， $(X_1, \dots, X_n)$  是从该总体中抽取的一个样本。

(1) 求未知参数  $\theta$  的矩估计  $\hat{\theta}$ , (2) 判断  $\hat{\theta}$  是否为参数  $\theta$  的无偏估计, (3) 求  $D(\hat{\theta})$ 。

解：

$$(1) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{\theta}{2}, \text{ 所以, } \theta = 2E(X),$$

将  $E(X)$  用样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  来替换, 得  $\theta$  的矩估计为  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ . (5分)

$$(2) \text{ 由于 } E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta,$$

所以,  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$  是参数  $\theta$  的无偏估计. (5分)

$$(3) D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n}D(X), \text{ 而}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x)dx - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{20}$$

$$\text{所以, } D(\hat{\theta}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{4}{n} \times \frac{\theta^2}{20} = \frac{\theta^2}{5n}. \quad (5分)$$

#### 六、(10分)

(1) 在正常状态下, 某种牌子的香烟一支平均 1.1 克, 若从这堆香烟中取 36 支作为样本, 测得样本均值  $\bar{X}$  为 1.008 (克), 样本方差  $S^2$  为 0.316<sup>2</sup>, 问这堆香烟是否处于正常状态. 已知香烟 (支) 的重量服从正态分布.

( $\alpha = 0.05$ , 检验假设  $H_0: \mu = 1.1, H_1: \mu \neq 1.1$ .)

(2) 某种导线的电阻服从正态分布  $N(\mu, 0.005^2)$ . 今从新生产的一批导线中抽取 9 根, 测其电阻, 得  $s = 0.008$  欧. 能否认为这批导线电阻的标准差仍为 0.005?

( $\alpha = 0.05$ , 检验假设  $H_0: \sigma = 0.005, H_1: \sigma \neq 0.005$ .)

解: (1) 要检验的假设为  $H_0: \mu = 1.1, H_1: \mu \neq 1.1$ .

$$\text{检验用的统计量 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

$$\text{拒绝域为 } |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.0301. \quad (3分)$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(1.008 - 1.1)}{0.316} \times 6 = -1.75,$$

$$|t| = 1.75 < t_{0.025}(35) = 2.0301. \text{ 没落在拒绝域内,}$$

所以接受  $H_0$ , 认为这堆香烟正常. (2分)

(2) 要检验的假设为  $H_0: \sigma = 0.005, H_1: \sigma \neq 0.005$ .

$$\text{或 } H_0: \sigma^2 = 0.005^2, H_1: \sigma^2 \neq 0.005^2$$

$$\text{检验用的统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1).$$

$$\text{拒绝域为 } \chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(8) = 17.534 \quad \text{或}$$

$$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(8) = 2.18, \quad (3分)$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{8 \times 0.008^2}{(0.005)^2} = 20.48, \chi^2 > \chi_{0.025}^2(8), \text{ 落在拒绝域内,}$$

故应拒绝  $H_0$ , 不能认为这批导线的电阻标准差仍为 0.005. (2分)

附表: 标准正态分布数值表

$\chi^2$  分布数值表

t 分布数值表

$\Phi(0.28) = 0.6103$	$\chi_{0.025}^2(8) = 17.534$	$t_{0.025}(35) = 2.0301$
$\Phi(1.96) = 0.975$	$\chi_{0.975}^2(8) = 2.18$	$t_{0.025}(36) = 2.0281$
$\Phi(2.0) = 0.9772$	$\chi_{0.025}^2(9) = 19.022$	$t_{0.05}(35) = 1.6896$
$\Phi(2.5) = 0.9938$	$\chi_{0.975}^2(9) = 2.7$	$t_{0.05}(36) = 1.6883$

北京邮电大学 2013—2014 学年第二学期

3 学时《概率论与数理统计》期末考试试题 (B)

一、 填空题 (每小题 3 分, 共 45 分):

1. 设  $A, B, C$  为三个事件, 则它们当中恰有两个发生, 这个事件用  $A, B, C$  的运算关系表

示为  $\overline{ABC} \cup \overline{ABC} \cup \overline{ABC}$ .

2. 设事件  $A, B$  相互独立, 且  $P(A)=0.5, P(AB)=0.3$ , 则  $P(B|A \cup B)=3/4$ .

3. 设平面区域  $D$  由  $x=1, y=0, y=x$  围成, 平面区域  $D_1$  由  $y=x^2, y=x$  围成. 现向  $D$  内随机地依次投掷质点, 记  $X$  为质点首次落入  $D_1$  所需次数, 则概率  $P\{X > 5\} = (2/3)^5$

4. 设随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X=k\} = \frac{1}{2^k}, k=1, 2, 3, P\{X=4\}=a$ , 则  $P\{\sin \frac{X\pi}{2} = 0\} = 3/8$ . (先确定常数  $a$ , 再计算结果)

5. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  则  $P\{0 < X < \frac{\pi}{6}\} = 1/4$ .

6. 设随机变量  $X$  服从  $(0,1)$  上的均匀分布, 即  $X \sim U(0,1)$ , 函数  $\Phi$  是标准正态分布的分布函数, 记  $Y = \Phi^{-1}(X)$ , 则概率  $P(Y \leq 0) = 1/2$

7. 设随机变量  $X_1, X_2$  独立同分布, 概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, Y = \min(X_1, X_2)$  的分布函数为  $F_Y(y)$ , 则  $F_Y(1) = 1 - e^{-2}$ .

8. 设二维正态分布随机变量  $(X, Y) \sim N(1, 1, 2, 2, 0)$ , 即  $EX = EY = 1, DX = DY = 2, \rho_{XY} = 0$ , 则概率  $P\{X + Y < 0\} = 0.1587$  ( $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413$ )

9. 设二维随机向量  $(X, Y)$  服从矩形区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$  上的均匀分布, 且

$$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y; \\ 1, & X > Y. \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y; \\ 1, & X > 2Y. \end{cases}$$

则  $P(U=0, V=0) = 1/4$ .

10. 将一骰子投掷 180 次, 利用中心极限定理可得点数 1 至多出现 35 次的概率近似为 0.8413. ( $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413$ )

11. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  已知,  $\sigma^2$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_{18}$  是来自总体  $X$  的简单随机

样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 则下面函数为统计量的为 BC.

A.  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$ . B.  $\frac{\bar{X} - \mu}{S}$ . C.  $\frac{1}{18} \sum_{i=1}^{17} (X_{i+1} - X_i)^2$ . D.  $\frac{1}{18\sigma} \sum_{i=1}^{17} (X_{i+1} - X_i)^2$ .

12. 设总体  $X$  的期望为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $X_1, X_2, X_3, X_4$  为来自  $X$  的简单随机样本, 令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{2}{3}X_3 + \frac{1}{4}X_4, \quad \hat{\mu}_3 = X_1,$$

则  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  中, 是  $\mu$  的最有效无偏估计为 ( $\hat{\mu}_1$ ).

13. 设随机变量  $t = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ , 其中  $X_1, X_2$  相互独立, 且  $X_1 \sim N(0, 1)$ ,  $X_2 \sim \chi^2(n)$  (自由度为  $n$  的卡方分布), 则下面正确的是 (AD).

A.  $t^2 \sim F(1, n)$ . B.  $t^2 \sim F(n, 1)$ . C.  $\frac{1}{t^2} \sim F(1, n)$ . D.  $\frac{1}{t^2} \sim F(n, 1)$ .

14. 设总体  $X \sim U(\theta, 2\theta)$ ,  $\theta > 0$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 若  $C\bar{X}$  为  $\theta$  的无偏估计, 则常数  $c = 2/3$

15. 设总体  $X \sim N(\mu, 0.85^2)$ ,  $\mu$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_{25}$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 其观察值  $\bar{x} = 2.25$ , 则  $\mu$  的置信水平为 0.95 的双侧置信区间为

$$(u_{0.025} = 1.96)$$

$$[1.9168, 2.5832]$$

二(12 分). 设随机变量  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1, \end{cases}$$

求 (1)  $X$  的分布函数, (2)  $P\{2X > 1\}$ , (3)  $EX$ .

解.  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1, \end{cases}$  (4 分)

$$P\{2X > 1\} = 1 - P\{X \leq \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2} \quad (4 \text{ 分})$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \frac{e^x}{2} dx + \int_0^{\infty} x \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(x-1)} dx = 1 \quad (4 \text{ 分})$$

三(20分). 设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x+y), & x > 0, y > 0, x+y < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求: (1) 常数  $a$ ; (2) 关于  $X$  的边缘概率密度  $f_X(x)$ ; (3) 条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ ; (4)

条件概率  $P\{Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2}\}$ ; (5)  $Z = X + Y$  的概率密度.

$$\text{解: (1) } \int_0^1 dx \int_0^{1-x} a(x+y) dy = a \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x^2) dx = \frac{a}{3} = 1 \text{ 得 } a = 3 \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_0^{1-x} 3(x+y) dy = \frac{3}{2} (1-x^2)$$

所以

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} (1-x^2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

(3) 当  $0 < x < 1$  时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{3(x+y)}{\frac{3}{2}(1-x^2)}, & 0 < y < 1-x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{(1-x^2)}, & 0 < y < 1-x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(4 分)

$$(4) P\{Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2}\} = \frac{P\{Y < \frac{1}{2}, X < \frac{1}{2}\}}{P\{X < \frac{1}{2}\}} = \frac{\int_0^{1/2} dx \int_0^{1/2-x} 3(x+y) dy}{\int_0^{1/2} \frac{3}{2} (1-x^2) dx} = 6/11 \quad (4 \text{ 分})$$

(5)  $Z$  的分布函数为

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$$

——当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = 0$

当  $z \geq 1$  时,  $F_Z(z) = 1$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 3(x+y) dy = \int_0^z \frac{3}{2} (z^2 - x^2) dx = z^3$$

$$\text{所以 } F_Z(z) = \begin{cases} z^3, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

从而得  $Z = X + Y$  的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 3z^2, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

四(11分). 设总体概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本, 求

(1)  $\theta$  的矩估计, (2)  $\theta$  的最大似然估计.

$$\text{解 (1) 令 } EX = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\text{因为, } EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1},$$

$$\text{所以 } \hat{\theta} = \left( \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \right)^2. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 定义似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = \sqrt{\theta} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1},$$

$$0 \leq x_i \leq \theta, i=1, 2, \dots, n$$

$$\text{取对数, } \ln(L(\theta)) = \frac{n}{2} \ln \theta + (\sqrt{\theta}-1)(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n)$$

$$\text{求导并令 } \frac{d \ln(L(\theta))}{d \theta} = \frac{n}{2 \theta} + (\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) \frac{1}{2 \sqrt{\theta}} = 0,$$

$$\text{得 } \hat{\theta} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^{-2} \quad (6 \text{ 分})$$

五(12分). 检验一批物质, 根据以往经验其重量服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$   $\mu, \sigma^2$  均未知.

要求该批物质平均重量为 100 公斤, 方差为 5. 今抽取 9 件, 测得样本均值  $\bar{x} = 99.6$ ,

样本方差  $s^2 = 4.2$ . 在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下, 检验

$$(1) H_0: \mu = 100, \quad H_1: \mu \neq 100,$$

$$(2) H_0: \sigma^2 = 5, \quad H_1: \sigma^2 \neq 5.$$

$$(t_{0.025}(8) = 2.306, \chi_{0.025}^2 = 17.53, \chi_{0.975}^2 = 2.18)$$

解 (1) 因为  $\sigma^2$  未知, 选统计量  $t(n-1) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ , 其拒绝域为  $\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ . 带入数

据得  $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| \approx 0.6$ ,  $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$ , 因为  $0.6 < 2.306$ , 所以接受  $H_0$ .

(6分)

(2) 选统计量  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 其拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1), \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1),$$

带入数据得  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 6.72$ , 因为  $\chi_{0.025}^2 = 17.53$ ,  $\chi_{0.975}^2 = 2.18$ , 所以

$2.18 < 6.72 < 17.53$ , 故接受  $H_0$ . (6分)

# 北京邮电大学 2013-2014 学年第二学期

## 《概率论与数理统计》期末考试题（经管）（B 卷）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

### 一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知事件  $A, B$  相互独立，且  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{9}$ ,  $P(\bar{A} \cap B) = P(A \cap \bar{B})$ ，则

$$P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

答：2/3

2. 如果每次试验的成功率都是  $p$ ，且已知在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为  $\frac{19}{27}$ ，则  $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：1/3.

3. 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ a-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，则

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

答：2.

4. 设随机变量  $X \sim N(-3, 1)$ ,  $Y \sim N(4, 4)$ ，且  $X$  与  $Y$  相互独立，设随机变量

$$Z = X - 2Y + 8, \text{ 则 } E(Z) = \underline{\hspace{2cm}}, D(Z) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答：-3, 17.

5. 设随机变量  $X$  的方差  $D(X)$  存在， $a > 0$ ，则  $P\{|X - E(X)| > a\} \leq (\quad)$ 。

- (A)  $D(X)$     (B) 1    (C)  $\frac{D(X)}{a^2}$     (D)  $a^2 D(X)$

答：C

6. 设  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，则  $(X, Y)$  落入区域  $D$  的概率

为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（其中区域  $D$  由直线  $x + y = 1$  及  $x$  轴和  $y$  轴所围成）

$$\text{答案： } 1 - \frac{2}{e}$$

7. 假设某种型号的螺丝钉的重量是随机变量，期望值为 50 克，标准差为 5 克，则 100 个螺丝钉的总重量超过 5000 克的概率约为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：0.5

8. 若随机变量  $X \sim t(n)$ ，则  $\frac{1}{X^2}$  服从  $\underline{\hspace{2cm}}$  分布。

答  $F(n, 1)$

9. 在假设检验中，原假设  $H_0$ ，备择假设  $H_1$ ，则称  $(\quad)$  为犯第一类错误。

- (A)  $H_0$  为真，接受  $H_0$     (B)  $H_0$  不真，接受  $H_0$   
(C)  $H_0$  为真，拒绝  $H_0$     (D)  $H_0$  不真，拒绝  $H_0$

答案 C

10. 设  $X_1, X_2, \dots, X_{15}$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本，其中  $\mu, \sigma^2$  均未知。

$\bar{x} = 5.4$  为样本均值，样本方差为  $s^2 = 0.16$ 。则置信水平为 0.95 的  $\mu$  的双侧置信区间为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：(5.178, 5.622)

二、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D$  上的均匀分布，

$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$ ，求  $X$  与  $Y$  的协方差  $\text{cov}(X, Y)$ 。

解：由题可知，二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} 2x dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2 dx = \frac{2}{3} \quad (2 \text{ 分})$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} 2y dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (2 \text{ 分})$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} 2xy dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx = \frac{1}{4} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{36} \quad (2 \text{ 分})$$

三. (15 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-3x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数  $k$ ;

(2) 求边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$ , 并判断  $X$  与  $Y$  是否相互独立?

(3) 求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$ .

解: (1) 由联合概率密度函数的性质, 可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-3x-4y} dx dy = k \left( -\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^{+\infty} \right) \left( -\frac{1}{4} e^{-4y} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{k}{12} = 1 \quad (4 \text{ 分})$$

故  $k = 12$

(2) 当  $x > 0$  时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{+\infty} 12e^{-3x-4y} dy = 3e^{-3x}$$

所以

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

当  $y > 0$  时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} 12e^{-3x-4y} dx = 4e^{-4y}$$

所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

因为  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

所以 随机变量  $X$  和  $Y$  是相互独立的. (2 分)

(3) 当  $y > 0$  时,

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

四. (10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $Y = 1 - e^{-2X}$  的分布函数和概率密度函数。

解: 因为  $X > 0$ , 故随机变量  $Y$  的取值范围为  $(0, 1)$ . (2 分)

令  $F_Y(y)$  表示随机变量  $Y$  的分布函数, 则

当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$  时 (1 分)



当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = 1$

(1 分)

当  $0 < y < 1$  时,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(1 - e^{-2X} \leq y) = P(X \leq -\frac{1}{2} \ln(1-y))$$

$$= \int_0^{-\frac{1}{2} \ln(1-y)} 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_0^{-\frac{1}{2} \ln(1-y)} = -e^{\ln(1-y)} + 1 = -(1-y) + 1 = y$$

(3 分)

所以随机变量  $Y$  的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

(1 分)

所以随机变量  $Y$  的概率密度函数为

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2 分)

五. (15 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  为未知参数。求

(1)  $\theta$  的矩估计量;

(2)  $\theta$  的极大似然估计量;

(3) 判断  $\theta$  的矩估计量和极大似然估计量是否无偏?

解: (1)  $\mu_1 = E(X) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta$

令  $\mu_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 得  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

(4 分)

(2) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $n$  个样本观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

上式两边取对数得

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i, \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

对上式关于  $\theta$  求导并令其等于零,

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

得  $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , 故  $\theta$  的极大似然估计量为  $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

(7 分)

(3) 由于  $E\hat{\theta}_1 = E\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \theta$

故  $\theta$  的矩估计量和极大似然估计量都是无偏估计量。

(4 分)

六. (10 分) 已知某种合成橡胶的拉伸强度  $X \sim N(221, 5^2)$  (单位: 0.1Pa), 现在改变了工艺条件后, 抽取了 10 个样本, 测得其样本均值  $\bar{x} = 219$ 。问在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下能否认为改变工艺后其拉伸强度有显著变化?

( $H_0: \mu = 221; H_1: \mu \neq 221$ )

解: 在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设

$$H_0: \mu = 221; H_1: \mu \neq 221,$$

由于总体服从正态分布, 且方差为 25, 故构造检验统计量

$$U = \frac{\bar{x} - 221}{\sigma / \sqrt{n}}$$

(3 分)

则其拒绝域为  $|U| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$

(2 分)

由已知其样  $\bar{x} = 219$ , 样本数为 10,  $\sigma = 5$

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$$

$$\text{经计算得 } |U| = \left| \frac{\bar{x} - 221}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{219 - 221}{5 / \sqrt{10}} \right| \approx 1.265 < 1.96 \quad (3 \text{ 分})$$

故拒绝原假设  $H_0$ ，认为改变工艺后其拉伸强度有显著变化。 (2 分)

附表：标准正态分布的分位数  $u_{0.025} = 1.96$ ，t 分布的分位数  $t_{0.025}(14) = 2.145$

A, A, C, A, A,  
B, C, C, C 1, 0.01, 4,  $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ ,  
北京邮电大学 2008—2009 学年第 2 学期 0.5,  $\mu_1$

# 《概率论与数理统计》期末考试答案 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

## 一、单项选择题 (每小题 3 分，共 27 分)

1. 设事件 A 与 B 相互独立，且  $P(A)=0.6, P(\bar{B}A)=0.1$ ，则  $P(A+B)=$  ( A )

(A) 0.7 (B) 0.9 (C) 0.2 (D) 0.1

2. 袋中有 3 个新球，2 个旧球，现每次取一个，无放回地抽取两次，则第二次取到新球的概率为 ( A )

(A)  $\frac{3}{5}$  (B)  $\frac{3}{4}$  (C)  $\frac{2}{4}$  (D)  $\frac{1}{4}$

3. 甲、乙、丙三人独立地破译一密码，他们每个人译出密码的概率均为  $\frac{1}{4}$ ，则密码被译出的概率为 ( C )

(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{64}$  (C)  $\frac{37}{64}$  (D)  $\frac{63}{64}$

4. 设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	0	1	2
p	0.3	C	0.2

$F(x)$  为  $\xi$  的分布函数，则  $F(1.5)=$  ( A )

(A) 0.8 (B) 0.5 (C) 0 (D) 0.1

5. 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布， $X \sim N(\mu, 4^2), Y \sim N(\mu, 5^2)$ ，记

$p_1 = P\{X \leq \mu - 4\}, p_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$ ，则 ( A )

(A) 对任何实数  $\mu$ ，都有  $p_1 = p_2$  (B) 对任何实数  $\mu$ ，都有  $p_1 < p_2$

(C) 对  $\mu$  的个别值，都有  $p_1 = p_2$  (D) 对任何实数  $\mu$ ，都有  $p_1 > p_2$

6. 设 X, Y 是两个随机变量，如果存在常数 a, b (a ≠ 0) 使得  $P(Y = aX + b = 1)$ ，且

$0 < \text{Var}(X) < +\infty$ ，那么  $\rho_{xy}$  为 ( B )

(A) 1 (B)  $\frac{a}{|a|}$  (C) -1 (D)  $\rho_{xy} < 1$

7. 设二元随机变量  $(\xi, \eta)$  的概率分布为

$\xi \backslash \eta$	1	2
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

则下列结论错误的是 ( C )

(A)  $P(\xi = \eta) = \frac{5}{9}$  (B)  $P(\xi = 1) = \frac{1}{3}$  (C)  $\xi, \eta$  不独立 (D)  $\xi, \eta$  独立

8. 设随机变量  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ，则  $E(2\xi + 1) =$  ( C )

(A) 14 (B) 41 (C) 21 (D) 20

9. 设总体  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自该总体的样本，记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，则  $D(\bar{X}) =$  ( C )

(A)  $\frac{n}{3}$  (B)  $\frac{2n}{9}$  (C)  $\frac{2}{9n}$  (D)  $\frac{2}{9n^2}$

## 二、填空题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是相互独立的随机变量序列且它们均服从参数为 1 的泊松分布，

则当  $n \rightarrow \infty$  时， $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  依概率收敛于 1

2. 设  $\xi \sim N(0,1)$ ，已知标准正态分布函数值  $\Phi_0(2.58) = 0.995$ ，则  $P(|\xi| > 2.58) =$   
0.01

3. 在 1~2000 中随机取一整数，问取到的数不能被 6 或 8 整除的概率是  $\frac{3}{4}$

4. 设随机变量  $X$  在区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  上服从均匀分布，求随机变量  $Y = \tan X$  的概率密度

函数  $f(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, -\infty < y < +\infty$ .

5. 设  $X \sim N(2,4)$ ， $Y \sim N(1,5)$ ，且  $X$  与  $Y$  相互独立，则  $P\{X-Y \geq 1\} =$  0.5

6. 设总体  $\xi$  的期望为  $\mu$ ，方差为  $\sigma^2$ ， $(X_1, X_2, X_3)$  为来自  $\xi$  的样本，令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{2}{3}X_3, \quad \hat{\mu}_3 = X_1,$$

则  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  中，是  $\mu$  的最有效无偏估计为 (  $\hat{\mu}_1$  )

### 三、(12 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为：

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数  $a$ .

(2) 求随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ .

(3) 求概率  $P(-\pi < X < \frac{\pi}{4})$ .

解：(1) 因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\pi} a \sin x dx = 1$ ，所以  $a = \frac{1}{2}$ . [4 分]

(2) 对任意  $x < 0, F(x) = 0$ ；对  $x \geq \pi, F(x) = 1$ ；

对  $x \in (0, \pi)$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} \sin x dx = \int_0^x \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

[4 分]

因此分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x < \pi, \\ 1, & x \geq \pi. \end{cases}$

(3)  $\Pr(-\pi < X < \frac{\pi}{4}) = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ . [4 分]

### 四、(16 分)

设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x+y), & x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)  $a$ ；(2) 关于  $X$  的边缘概率密度  $f_X(x)$ ；(3) 求  $E(XY)$

(4)  $Z = X + Y$  的概率密度.

解：(1)  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} a(x+y)dy = a \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)dx = \frac{a}{3} = 1$  得  $a = 3$  .....4 分

(2)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$

当  $0 < x < 1$  时， $f_X(x) = \int_0^{1-x} 3(x+y)dy = \frac{3}{2}(1-x^2)$

所以

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

..... 4分

$$(3) E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2xy(x+y)dy = \frac{1}{10} \left[ \frac{2}{3}x^2(1-x)^2 + x(1-x)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

$$(4) Z \text{ 的分布函数为}$$

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy$$

$$\text{当 } z < 0 \text{ 时, } F_Z(z) = 0$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时, } F_Z(z) = 1$$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 3(x+y)dy = \int_0^z \frac{3}{2}(z^2 - x^2)dx = z^3$$

$$\text{所以 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z^3, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

从而得  $Z = X + Y$  的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 3z^2, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

.....6分

五、(15分)

设总体  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha+2)x^{\alpha+1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$

的样本, 试求 (1)  $\alpha$  的最大似然估计, (2)  $\alpha$  的矩估计.

解: (1) 似然函数为

$$L(\alpha) = (\alpha+2)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha+1} \quad \text{.....(3分)}$$

$$\ln L(\alpha) = n \ln(\alpha+2) + (\alpha+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha+2} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad \text{.....(2分)}$$

解得  $\alpha$  的最大似然估计

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 2 \quad \text{.....(3分)}$$

$$(2) \int_0^1 x(\alpha+2)x^{\alpha+1}dx = \frac{\alpha+2}{\alpha+3} \quad \text{.....(2分)}$$

$$\text{令 } \frac{\alpha+2}{\alpha+3} = \bar{X}, \quad \text{.....(3分)}$$

$$\text{解得 } \alpha \text{ 的矩估计为 } \alpha = \frac{2-3\bar{X}}{\bar{X}-1} \quad \text{.....(2分)}$$

六、(12分)

一香烟制造者检验两种牌号香烟所含尼古丁量, 得结果如下:

牌号 A: 26, 24, 25, 22, 23    牌号 B: 27, 28, 25, 29, 26,

假设 A, B 两种香烟所含尼古丁分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma^2)$ , 试在显著性水平为 0.05 下, 检验两种香烟所含尼古丁量的期望值是否有差异? (经计算  $\bar{x} = 24, \bar{y} = 27, s_1^2 = 2.5, s_2^2 = 2.5$ ) [已知  $t_{0.05}(8) = 2.306$ ]

解: 检验期望值是否相等, 即检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{(3分)}$$

经计算,  $\bar{x} = 24, \bar{y} = 27, s_1^2 = 2.5, s_2^2 = 2.5$

$$\text{得 } s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 2.5, \quad T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = -3 \quad \text{.....(4分)}$$

$$\text{可见 } |T| = 3 > 2.306 = t_{0.05}(8) \quad \text{.....(3分)}$$

故拒绝  $H_0$ , 即应认为两种香烟尼古丁量的期望值是有差异的. ....(2分)

北京邮电大学 2008—2009 学年第一 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题 (每小题 4 分，共 60 分)：

1. 设  $P(A) = 0.5, P(\bar{A}B) = 0.4$ ，则  $P(B|A) = \underline{0.2}$ ；
2. 在三次射击中至少命中一次的概率为 0.875，则在一次射击中命中靶子的概率  $\underline{0.5}$ ；

3. 设随机变量  $X$  的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.4, & -1 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ ，则  $X$  的分布律为\_\_\_\_\_；

$X$	-1	1	3
$P$	0.4	0.4	0.2

4. 设  $X \sim N[0,1]$ ，则随机变量  $Y = e^X$  的概率密度函数当  $y > 0$  时为  $f_Y(y) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

5. 设  $X \sim U[-3,2]$ ， $Y = \begin{cases} -1, & X < 0 \\ 1, & X \geq 0 \end{cases}$ ，则  $EY = \underline{-1/5}$ ；

6. 如果随机变量  $X, Y$  的相关系数为  $\rho_{XY}$ ，且  $\xi = aX + b$ ， $\eta = cY + d$ ，其中  $a, c$  同号，

则  $\xi, \eta$  的相关系数为\_\_\_\_\_；  $\rho_{XY}$

7. 设 10 个电子管的寿命  $X_i (i=1 \sim 10)$  独立同分布，且  $D(X_i) = A (i=1 \sim 10)$ ，

则 10 个电子管的平均寿命  $Y$  的方差  $D(Y) = \underline{\quad\quad\quad} \cdot 0.1A$

8. 已知某公司组装产品的次品率为 0.04，现对该公司组装的 100 台产品逐个独立测试，

利用中心极限定理计算，测试结果不少于 4 台次品的概率为\_\_\_\_\_； 0.5

9. 设  $\bar{X}$  为总体  $X \sim N(3, 4)$  中抽取的样本  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  的均值，则

$$P(\bar{X} < 5) = \underline{\quad\quad\quad} ; 0.9772$$

10. 设  $X \sim t(m)$ ，则随机变量  $Y = X^2$  服从的分布为  $\underline{F(1, m)}$  (请写出自由度)

11. 设  $X$  的分布律为

$X$	1	2	3
$P$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

已知一个样本值  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$ ，则参数的极大似然估计值为\_\_\_\_\_； 5/6

12. 设  $X_1, X_2, \dots, X_6$  是取自总体  $X \sim N(0, 1)$  的样本， $Y = (\sum_{i=1}^3 X_i)^2 + (\sum_{i=4}^6 X_i)^2$ ，

则当  $c = \underline{\quad\quad\quad}$  时， $cY$  服从  $\chi^2$  分布， $E(\chi^2) = \underline{\quad\quad\quad}$ ； 1/3； 2

13. 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^\alpha, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\alpha > -1$  是未知参数， $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自  $X$  的样本，则  $\alpha$  的矩估计量

$$\text{为 } \underline{\quad\quad\quad} ; \hat{\alpha} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$$

14. 样本容量为  $n$  时，样本方差  $S^2$  是总体方差  $\sigma^2$  的无偏估计量，这是因为\_\_\_\_\_。

$$ES^2 = \sigma^2$$

二(6 分)、设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$(X, Y)$	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P$	0.4	0.2	$a$	$b$

若  $E(XY) = 0.8$ ，求(1)常数  $a, b$ ，(2)  $X, Y$  的协方差  $\text{cov}(X, Y)$ 。

解 (1) 由  $E(XY) = 0.8$ ， $1 \times 0.2 + 2 \times b = 0.8$ ， $b = 0.3$ ；(2 分)

$$\text{又 } a + b = 0.4, \quad a = 0.1 \quad (2 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.1 \quad (2 \text{ 分})$$

三(12 分)、设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c(4-2x-y) & x > 0, y > 0, 2x+y < 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $c$ ；(2)  $f_{Y|X}(y|x)$ ；(3)  $P\{Y \geq 2 | X = \frac{1}{2}\}$ 。

$$\text{解 (1) } 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} c(4-2x-y) dy \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore c = \frac{3}{16}$$

(2分)

(2) 先求 X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{4-2x} \frac{3}{16}(4-2x-y)dy = \frac{3}{8}(2-x)^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2分)

当  $0 < x < 2$  时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{4-2x-y}{2(2-x)^2} & 0 < y < 4-2x \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (2分)$$

$$(3) f_{Y|X}(y|x = \frac{1}{2}) = f_{Y|X}(y|x) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{2(3-y)}{9} & 0 < y < 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (2分)$$

$$P\{Y \geq 2 | X = \frac{1}{2}\} = \int_2^{+\infty} f_{Y|X}(y|x = \frac{1}{2})dy = \int_2^3 \frac{2}{9}(3-y)dy = \frac{1}{9} \quad (2分)$$

四(10分). 随机地从一批零件中抽取 16 个, 测得长度平均值为  $\bar{x} = 2.125cm$ ,  $s = 0.0170$ , 设零件长度分布为正态分布, 试求总体均值  $\mu$  的 90% 的置信区间: (1) 若  $\sigma = 0.01cm$ , (2) 若  $\sigma$  未知.

( $u_{0.05} = 1.645$ ,  $t_{0.05}(15) = 1.7531$ )

解 (1)  $\sigma$  已知.

置信区间为  $\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$ , (2分)

$$u_{\alpha/2} = u_{0.05} = 1.645, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} = 0.004, \quad (2分)$$

于是置信区间为 (2.121, 2.129). (1分)

(2) 若  $\sigma$  未知.

$$\text{置信区间为 } (\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)) \quad (2分)$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.05}(15) = 1.7531, S^2 = \frac{0.0044}{15}, \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) = 0.0075. \quad (2分)$$

于是置信区间为 (2.1175, 2.1325). (1分)

五(12分). 从某锌矿的东西两支矿脉中, 各取容量为 9 和 8 的样本分析后, 计算其样本含锌量的平

均值与方差分别为: 东支:  $\bar{x} = 0.230, S_1^2 = 0.1337, n_1 = 9$ ;

西支:  $\bar{y} = 0.269, S_2^2 = 0.1736, n_2 = 8$ ;

假定东西两支矿脉的含锌量分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 对  $\alpha = 0.05$ , 问能否认为

两支矿脉的含锌量相同, 即检验 (1)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ; (2)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ .

$$(F_{0.025}(8,7) = 4.90, F_{0.975}(8,7) = \frac{1}{F_{0.025}(7,8)} = \frac{1}{4.53}, \quad t_{0.025}(15) = 2.1315, )$$

解 设东支矿脉的含锌量为  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ , 西支矿脉的含锌量为  $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ ,

(1) 首先需检验假设:  $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ,

$$\text{取统计量 } F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(8,7), \quad (2分)$$

否定域为  $W: F \leq F_{1-\alpha/2}(8,7)$  或  $F \geq F_{\alpha/2}(8,7)$ , (2分)

$$F_{0.025}(8,7) = 4.90, F_{0.975}(8,7) = \frac{1}{F_{0.025}(7,8)} = \frac{1}{4.53}$$

$$\text{计算得 } F = \frac{0.1337}{0.1736} = 0.7702$$

因为  $\frac{1}{4.53} < F < 4.90$ , 故接受假设  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ . (2分)

(2) 检验假设  $H_0: \mu_x = \mu_y$ ,

$$\text{检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad (2分)$$

拒绝域为  $|T| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$  (2分)

计算得

$$t = \frac{0.230 - 0.269}{\sqrt{8 \times 0.1337 + 7 \times 0.1736}} \sqrt{\frac{9 \times 8 \times 15}{17}} = -0.2180$$

$$t_{0.025}(15) = 2.1315,$$

$$|t| < 2.1315$$

故接受假设, 即认为两支矿脉的含锌量相同. (2分)

# 北京邮电大学 2012—2013 学年第 2 学期

## 《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (A 卷)

一、填空题或选择题 (每小题 3 分, 共 45 分)

- 若事件  $A \subset B$ ,  $P(A) = 0.1, P(B) = 0.5$ , 则  $P(\bar{A} \cup B) = 1$ .
- 假设一批产品的一、二、三等品各占 60%, 30%, 10%, 现从中任取一件产品, 结果不是三等品, 则取得的是二等品的概率为  $2/3$ .
- 若随机变量  $X \sim N(2, \sigma^2)$ , 且  $P(2 < X < 4) = 0.3$ , 则  $P(X < 0) = 0.2$ .

- 设连续型随机变量  $X$  的概率密度  $f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ A(2-x), & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

则  $A = 1$ .

- 设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	-1	0	5
p	0.5	C	0.1

$F(x)$  为  $\xi$  的分布函数, 则  $F(2) = 0.9$ .

- 设随机变量  $X$  在  $[0, 1]$  上服从均匀分布, 则随机变量  $Y = e^X$  的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/y, & 1 < y < e \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 设随机变量  $\xi$  服从参数为  $\lambda = 5$  的泊松分布, 则  $\frac{E(\xi^2)}{D(\xi)} = 6$ .

- 设随机变量  $X, Y$  独立同分布, 记  $U = X - Y, V = X + Y$ , 则随机变量  $U$  和  $V$  的相关系数  $\rho_{UV} = 0$ .

- 设随机变量  $Y$  服从参数为 1 的指数分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & Y \leq k \\ 1, & Y > k \end{cases} \quad k = 1, 2. \quad \text{则 } E(X_1 + X_2) = e^{-1} + e^{-2}.$$

- 设  $\xi \sim N(5, 16)$ , 已知标准正态分布函数值  $\Phi_0(0.25) = 0.5987$ , 则  $P(\xi > 6) = 0.4013$ .

- 设  $X_1, X_2, \dots, X_{30}$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的样本, 则统计量  $\frac{\sum_{i=1}^{15} X_i^2}{\sum_{i=16}^{30} X_i^2}$  服从

$F(15, 15)$ .

- 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 且  $X \sim \chi^2_m, Y \sim \chi^2_m$ , 则  $X + Y \sim \chi^2_{2m}$ .

- 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为独立同分布的随机变量, 且  $X_i \sim N(0, 1)$ , 则:  $E(\sum_{i=1}^n X_i^2) = n$ .

- $\sigma^2$  未知, 正态总体的均值  $\mu$  的置信系数为  $1 - \alpha$  的置信区间的中心是  $\bar{X}$ .

- 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个样本,  $\mu, \sigma^2$  均为未知参

数, 则  $\sigma^2$  的极大似然估计为  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

二、(15 分)

设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 求  $(X, Y)$  的分布函数;
- 求概率  $P(X < Y)$ ;
- $X$  与  $Y$  是否相互独立;



(4) 求  $Z = X + Y$  的概率密度函数。

解：

(1)  $(X, Y)$  的分布函数为

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^y \int_0^x e^{-(u+v)} du dv = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}).$$

即  $F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  (4 分)

(2)  $P(X < Y) = \int_0^{+\infty} [\int_0^y e^{-(x+y)} dx] dy = \frac{1}{2}$  (4 分)

(3)  $X$  的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = e^{-x},$$

$$\text{即 } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

同理,  $Y$  的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

对于任意的  $x, y$ ,  $f_X(x)f_Y(y) = f(x, y)$

所以  $X$  与  $Y$  相互独立。 (4 分)

(4) 由  $X$  与  $Y$  的相互独立知, 当  $z > 0$ ,  $Z$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-x} e^{-(z-x)} dx = ze^{-z}, \text{ 即}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} ze^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$
 (3 分)

三、(12 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布为:

$X \backslash Y$	1	2	3
1			
2			

1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$a$	$b$

若  $X$  和  $Y$  相互独立, 试求:

(1)  $a$  和  $b$  的值;

(2)  $E(X), E(Y), D(X), D(Y), E(XY), \rho_{xy}$ .

解:

(1) 因为所有联合概率和为 1, 以及相互独立性, 列方程解得  $a=2/9, b=1/9$  (4 分)

(2)  $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$  (1 分)

$$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{9}$$
 (2 分)

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$
 (1 分)

$$E(Y^2) = 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{2}{3} = 3,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{2}{9}$$
 (2 分)

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{25}{9}$$
 (1 分)

$$\text{由于 } X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立, } \rho_{xy} = 0.$$
 (1 分)

四、(15 分)

设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sigma} e^{-\frac{x}{3\sigma}}, & 0 < x < +\infty, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\sigma > 0$  为未知参数,

数,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自  $X$  的容量为  $n$  的一个样本, 试求:

(1)  $\sigma$  的矩估计;

(2)  $\sigma$  的极大似然估计;

(3) 验证  $\sigma$  的极大似然估计是否为  $\sigma$  的无偏估计。

解：

$$(1) \text{ 因为 } E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{3\sigma} e^{-\frac{x}{3\sigma}} dx = 3\sigma = \bar{X},$$

$\sigma$  的矩估计为：  $\bar{X}/3$  ..... (5 分)

(2) 似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\frac{1}{3\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{3\sigma} \sum_{i=1}^n x_i}$$

对数似然函数为：

$$\ln L(\sigma) = -n \ln 3\sigma - \frac{1}{3\sigma} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\text{解得 } \sigma \text{ 的最大似然估计 } \hat{\sigma} = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ ..... (5 分)}$$

$$(3) E(\hat{\sigma}) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} x \frac{1}{3\sigma} e^{-\frac{x}{3\sigma}} dx = \sigma,$$

所以极大似然估计是无偏估计。 ..... (5 分)

五、(13 分)

新旧两个水稻品种进行对比试验，旧品系分成 25 个小区，平均产量  $\bar{x} = 35.65\text{kg}$ ，样本标准差  $s_x = 2.32\text{kg}$ ；新品系分成 20 个小区，平均产量和样本标准差分别为  $\bar{y} = 37.35\text{kg}$ ， $s_y = 1.89\text{kg}$ ；设两种水稻产量分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ；在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下：

(1) 检验两个品种的方差是否有差异？

(2) 在两品种总体方差未知但相等的条件下，求  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间。

分位点：  $t_{0.025}(43) = 2.02$ ，  $F_{0.025}(24, 19) = 2.45$ ，  $F_{0.025}(19, 24) = 2.33$ 。

解：(1) 依题意需检验假设

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

用 F 检验，当  $H_0$  成立时检验统计量为  $F = \frac{s_x^2}{s_y^2} \sim F(24, 19)$ ，

$$\text{代入样本观测值，计算得 } F = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{2.32^2}{1.89^2} = 1.507,$$

$$\frac{1}{F_{0.025}(19, 24)} = 0.429, \quad 0.429 < 1.507 < 2.45, \text{ ..... (7 分)}$$

所以我们接受  $H_0$ ，认为两总体的方差没有差异。

(3) 两方差相等，均值差的区间估计为：

$$[\bar{x} - \bar{y} - t_{0.025}(43)S_w \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{0.025}(43)S_w \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}}]$$

其中  $S_w = 2.141$

代入观测值，得到均值差的区间估计为

$$[-2.997, -0.403] \text{ ..... (6 分)}$$

北京邮电大学 2012—2013 学年第 1 学期

《数理统计》期末考试试题 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上  
一律无效。

一. 填空题 (50 分, 每空 5 分)

1. 设随机变量  $X \sim \chi^2(4)$ , 则  $EX =$  \_\_\_\_\_.
2. 设总体  $X$  的均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $X$  的

样本,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则  $D(\bar{X} - X_1) =$  \_\_\_\_\_.

3. 设总体  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$(1-\theta)^2$	$2\theta(1-\theta)$	$\theta^2$

$0 < \theta < 1$  为未知参数, 从该总体中抽取了一个容量为 10 的样本, 其样本均值为 0.8, 则  $\theta$  的矩估计值为 \_\_\_\_\_.

4. 设  $z_\alpha$  为标准正态分布的上侧  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 0.5$ ) 分位数, 下面有四个结论:

(1)  $z_\alpha(n) + z_{1-\alpha}(n) = 1$       (2)  $z_\alpha(n) + z_{1-\alpha}(n) = 0$

(3)  $P\{Z > z_\alpha\} = \alpha, Z \sim N(0,1)$       (4)  $P\{|Z| > z_\alpha\} = 2\alpha, Z \sim N(0,1)$

这四个结论中错误的是 \_\_\_\_\_.

5. 设总体  $X \sim N(\mu, 8)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_{32}$  为来自总体  $X$  的样本, 则

$P\{|\bar{X} - \mu| < 0.5\} =$  \_\_\_\_\_ . ( $\Phi(1) = 0.8413$ )

6. 设总体  $X \sim N(0,1)$ ,  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  为来自总体  $X$  的样本,

$Y = \frac{a(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_ 时,  $Y$  服从  $t$  分布, 其自由度为 \_\_\_\_\_.

7. 设  $x_1, x_2, \dots, x_{16}$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 经计算样本均值为  $\bar{x} = 10.8$ ,

样本标准差为 1.2, 则  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间为

\_\_\_\_\_ . ( $t_{0.025}(15) = 2.13$ )

8. 设总体  $X$  的均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $X_1, X_2, X_3, X_4$  为来自总体  $X$  的样本,

下面有  $\mu$  的四个估计量

$T_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4), T_2 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

$T_3 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), T_4 = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \frac{1}{4}X_4$

在上述  $\mu$  的估计量中最有效的是 \_\_\_\_\_.

9. 设  $x_1, x_2, x_3, x_4$  为来自总体  $N(\mu, 1)$  的样本, 考虑假设检验问题

$H_0: \mu \leq 0 \quad H_1: \mu > 0$

若该检验问题的拒绝域为  $\bar{x} > 0.98$ , 则在  $\mu = 1.5$  时, 该检验法犯第二类错误

的概率为 \_\_\_\_\_.

( $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1.04) = 0.8508, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(1.64) = 0.95$ )

二. (15 分)

设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样

本,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

并算得样本均值和样本方差如下：

甲品种： $\bar{x}=98.2$ ， $s_x^2=7.95$

乙品种： $\bar{y}=100.4$ ， $s_y^2=5.15$

设甲、乙两种小麦所需天数分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ， $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，两样本独立。

(1) 检验假设  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ， $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ；

(2) 检验假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ， $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ ；

(检验水平都取为  $\alpha = 0.05$ ， $F_{0.025}(9,9) = 4.03$ ， $t_{0.025}(18) = 2.1$ ， $\sqrt{1.31} = 1.14$ )

北京邮电大学 2012—2013 学年第 1 学期

《数理统计》期末试题答案

一. 填空题 (50 分，每空 5 分)

1. 4

2.  $\frac{n-1}{n} \sigma^2$

3. 0.4

4. 1.31

5. 0.4826

6.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , 3

7. (10.161, 11.439)

8.  $T_1$

9. 0.1492

二. (15 分)

解：(1)  $E\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \mu$ ， $D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n} \sigma^2$

由于  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ；

所以  $E[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}] = n-1$ ， $D[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}] = 2(n-1)$

从而可得  $ES^2 = \sigma^2$ ， $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ 。……8 分

(2)  $ET = aE\bar{X}^2 + bES^2 = a(D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2) + ES^2$

$$= a\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) + b\sigma^2 = a\mu^2 + \left(b + \frac{a}{n}\right)\sigma^2$$

由于  $T$  为  $\sigma^2$  的无偏估计, 故有

$$a\mu^2 + \left(b + \frac{a}{n}\right)\sigma^2 = \mu^2, \forall \mu \in (-\infty, +\infty), \sigma \in (0, +\infty),$$

$$\text{所以 } a=1, b=-\frac{1}{n}. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

三. (15 分)

解: (1) 似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

得  $\theta$  的最大似然估计量

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(2) E \ln X = \int_0^1 \ln x \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} dx = -\theta,$$

$$\text{所以 } E \hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\ln X_i) = \theta. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

四. (10 分)

$$\text{解: (1) } EX = \sum_{k=r}^{\infty} k C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = rp^{-1} \sum_{k=r}^{\infty} C_k^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r+1}$$

$$= \frac{r}{p} \sum_{k=r+1}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r+1} = \frac{r}{p}$$

2

令

$$\frac{r}{p} = \bar{X}$$

得  $p$  的矩估计  $\hat{p} = \frac{r}{\bar{X}}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^n C_{x_i-1}^{r-1} p^r (1-p)^{\sum x_i - nr}$$

$$\ln L = \sum \ln C_{x_i-1}^{r-1} + nr \ln p + (\sum x_i - nr) \ln(1-p)$$

令

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{nr}{p} - \frac{\sum x_i - nr}{1-p} = 0$$

得  $p$  的最大似然估计  $\hat{p} = \frac{r}{\bar{X}}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$

五. (10 分)

解: (1) 检验统计量为

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

拒绝域为

$$F > F_{0.975}(9,9) = \frac{1}{4.03} \text{ 或 } F > F_{0.025}(9,9) = 4.03$$

由样本算得

$$F = \frac{7.95}{5.15} = 1.54$$

易见, 样本没有落入拒绝域, 所以接受原假设, 即可认为  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 检验统计量为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}$$

拒绝域为

3

$$|t| > t_{0.975}(18) = 2.1$$

由样本算得

$$t = \frac{98.2 - 100.4}{\sqrt{6.55 \times \sqrt{0.2}}} = -1.93$$

易见,样本没有落入拒绝域,所以接受原假设,即可认为  $\mu_1 = \mu_2$ . .....10 分

北京邮电大学 2011—2012 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B)

注意：所有答案及解答必须写在答题纸上，写在试题纸上一律无效。

一、填空题 (每题 4 分，共 60 分)：

1. 设  $P(A) > 0, P(B) > 0$ ，则  $P(A), P(AB), P(A \cup B), P(A) + P(B)$  按由小到大的顺序排列 (用符号  $\leq$  连接) 为：\_\_\_\_\_；

2. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取 2 件，已知所取 2 件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为\_\_\_\_\_；

3. 设某种机器按设计要求使用寿命超过 20 年的概率为 0.8，超过 30 年的概率为 0.5，则该机器使用 20 年后，在接下来的 10 年内损坏的概率为\_\_\_\_\_；

4. 设随机变量  $X$  和  $Y$  的分布律分别为： $P\{X=k\} = C_2^k p^k (1-p)^{2-k}, k=0,1,2$ ；

$P\{Y=m\} = C_4^m p^m (1-p)^{4-m}, m=0,1,2,3,4$ ，且  $P\{X \geq 1\} = 5/9$ ，则  $P\{Y \geq 1\} =$ \_\_\_\_\_；

5. 设连续型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ a + b \arcsin x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_；

6. 设  $Y = \ln X$ ，且  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $\Phi(x)$  是标准正态分布的分布函数，则

$P\{e^{\mu+\sigma} < X < e^{\mu+\sigma}\} =$ \_\_\_\_\_；

7. 若  $n$  对恋人作男女随机配对游戏，则每次游戏中平均有\_\_\_\_\_对恋人能配成对；

8. 设  $X$  与  $Y$  的相关系数为 0.9， $Z = X - 0.4$ ，则  $Y$  与  $Z$  的相关系数为\_\_\_\_\_；

9. 设  $(X, Y)$  的概率分布为

Y \ X	0	2
0	1/3	a
2	b	1/6

已知事件  $\{X=0\}$  与  $\{X+Y=2\}$  相互独立，则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_；

10. 设某地区有 10000 盏电灯，若夜晚每盏灯开灯的概率为 0.7，且每盏灯的开关相互独立，则由切比雪夫不等式知该地区夜晚同时开着的电灯数在 6800 到 7200 之间的概率  $\geq$ \_\_\_\_\_ (精确到小数点后 2 位)；

11. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本， $\bar{X}$  与  $S^2$  分别为其样本均值和样本方差，则  $\frac{2(\bar{X} - \mu)}{S} \sim$ \_\_\_\_\_；

12. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是取自总体  $X$  的样本，且  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ ，若  $C[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2]$  是  $\sigma^2$  的无偏估计，则  $C =$ \_\_\_\_\_；

13. 设  $X_1, \dots, X_5$  是取自总体  $X$  的样本，且  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ ，则  $\hat{\mu}_1 = X_1$ ，

$\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$ ， $\hat{\mu}_3 = \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5}$  都是  $\mu$  的无偏估计，其中最有效的是\_\_\_\_\_；

14. 设  $X_1, \dots, X_n$  是取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本，其中  $\mu$  与  $\sigma^2$  均未知，则  $\sigma^2$  的置信水平为  $1-\alpha$  的单侧置信上限为\_\_\_\_\_；

15. 设  $X_1, \dots, X_9$  是取自总体  $X \sim N(\mu, 1)$  的样本，欲检验  $H_0: \mu = 0; H_1: \mu \neq 0$ ，若取  $W = \{\bar{X} \geq 0.653\}$  为  $H_0$  的拒绝域，则检验的显著性水平  $\alpha =$ \_\_\_\_\_ (精确到小数点后两位)。

二、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = Ae^{-|x|}, -\infty < x < \infty,$$

求：(1) 系数  $A$ ；(2)  $X$  的分布函数  $F_X(x)$ ；(3)  $Y = 3X + 2$  的概率密度  $f_Y(y)$ 。

三、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  在抛物线  $y = x^2$  与直线  $y = x + 2$  所围的区域上服从均匀分布，求：(1)  $(X, Y)$  的概率密度；(2)  $(X, Y)$  关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘概率密度；(3)  $P\{X+Y \geq 2\}$ 。

北京邮电大学 2011—2012 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B) 参考答案

一、填空题 (每题 4 分, 共 60 分):

1.  $P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

2.  $1/5$

3.  $3/8$

4.  $65/81$

5.  $a=1/2, b=1/\pi$

6.  $\Phi(b) - \Phi(a)$

7.  $1$

8.  $0.9$

9.  $a=1/6, b=1/3$

10.  $0.95$

11.  $t(3)$

12.  $1/6$

13.  $\hat{\mu}_3$

14.  $(n-1)S^2 / \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

15.  $0.05$

二、(10 分) 解: (1) 因为  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-|x|} dx = 2A \int_0^{\infty} A e^{-x} dx = 2A = 1$

所以  $A = \frac{1}{2}$ ,  $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < \infty$  (3 分)

(2) 当  $x < 0$  时,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^x dx = \frac{1}{2} e^x$ ,

当  $x \geq 0$  时,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - e^{-x}) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2}$

即  $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & x < 0; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$  (3 分)

(3)  $y = 3x + 2$  严格单调、可导, 其反函数  $x = g(y) = \frac{y-2}{3}$  的导数  $g'(y) = \frac{1}{3}$

所以  $f_Y(y) = |g'(y)| f_X[g(y)] = \frac{1}{6} e^{-\frac{|y-2|}{3}}$  (4 分)

或:  $Y$  的分布函数

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{3X + 2 \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{y-2}{3}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{(y-2)/3}, & y < 2; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-(y-2)/3}, & y \geq 2. \end{cases}$

因此  $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{(y-2)/3}, & y < 2; \\ \frac{1}{6} e^{-(y-2)/3}, & y \geq 2. \end{cases} = \frac{1}{6} e^{-|y-2|/3}, -\infty < y < \infty$  (4 分)

三、(10 分) 解 (1) 记抛物线  $y = x^2$  与直线  $y = x + 2$  所围的区域为  $G$  (如图), 并设  $(X, Y)$  的概率密度为

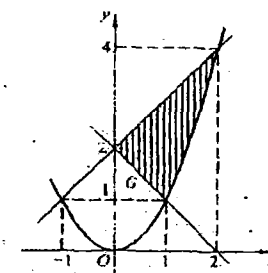
$f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$

则

$1 = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} C dy = \frac{9}{2} C$

于是  $C = \frac{2}{9}$ , 从而  $(X, Y)$  的概率密度为

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$  (3 分)





北京邮电大学 2011—2012 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B) 参考答案

一、填空题 (每题 4 分, 共 60 分):

1.  $P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

2.  $1/5$

3.  $3/8$

4.  $65/81$

5.  $a=1/2, b=1/\pi$

6.  $\Phi(b) - \Phi(a)$

7.  $1$

8.  $0.9$

9.  $a=1/6, b=1/3$

10.  $0.95$

11.  $t(3)$

12.  $1/6$

13.  $\hat{\mu}_3$

14.  $(n-1)S^2 / \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

15.  $0.05$

二、(10 分) 解: (1) 因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-|x|} dx = 2A \int_0^{+\infty} A e^{-x} dx = 2A = 1$

所以  $A = \frac{1}{2}$ ,  $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < \infty$  (3 分)

(2) 当  $x < 0$  时,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} e^x$ ,

当  $x \geq 0$  时,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$ ,

即  $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & x < 0; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$  (3 分)

(3)  $y = 3x + 2$  严格单调、可导, 其反函数  $x = g(y) = \frac{y-2}{3}$  的导数  $g'(y) = \frac{1}{3}$

所以  $f_Y(y) = \left| g'(y) \right| f_X[g(y)] = \frac{1}{6} e^{-\frac{|y-2|}{3}}$  (4 分)

或:  $Y$  的分布函数

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{3X + 2 \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{y-2}{3}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{(y-2)/3}, & y < 2; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-(y-2)/3}, & y \geq 2. \end{cases}$

因此  $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{(y-2)/3}, & y < 2; \\ \frac{1}{6} e^{-(y-2)/3}, & y \geq 2. \end{cases} = \frac{1}{6} e^{-|y-2|/3}, \quad -\infty < y < \infty$  (4 分)

三、(10 分) 解 (1) 记抛物线  $y = x^2$  与直线  $y = x + 2$  所围的区域为  $G$  (如图), 并设  $(X, Y)$  的概率密度为

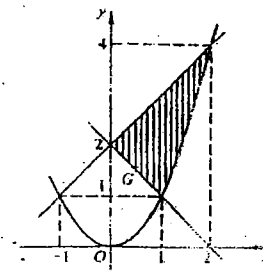
$f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$

则

$1 = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_1^{x+2} C dy = \frac{9}{2} C$

于是  $C = \frac{2}{9}$ , 从而  $(X, Y)$  的概率密度为

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$  (3 分)



(2) 先求  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘概率密度  $f_X(x)$ 。显然, 当  $x < -1$  或  $x > 2$  时,  $f(x, y) = 0$ ,

因此

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = 0$$

当  $-1 \leq x \leq 2$  时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_1^{x+2} \frac{2}{9} dy = \frac{2}{9} (2 + x - x^2)$$

于是  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9} (2 + x - x^2), & -1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

再求  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ 。显然, 当  $y < 0$  或  $y > 4$  时,

$f(x, y) = 0$ , 因此

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = 0$$

当  $0 \leq y \leq 1$  时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{\sqrt{y}-2}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9} dy = \frac{4}{9} \sqrt{y}$$

当  $1 < y \leq 4$  时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{\sqrt{y}-2}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9} dy = \frac{2}{9} (2 + \sqrt{y} - y)$$

所以  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{9} \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{2}{9} (2 + \sqrt{y} - y), & 1 < y \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4 \text{分})$$

(3)  $P\{X + Y \geq 2\}$  等于  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$  在图 3-2-1 中阴影区域上的二重积分。

分, 即

3

$$\begin{aligned} P\{X + Y \geq 2\} &= \iint_{x+y \geq 2} f(x, y) dx dy = \iint_{x+y \geq 2} \frac{2}{9} dx dy \\ &= \frac{2}{9} \left( \int_1^2 dx \int_{2-x}^{x+2} dy + \int_2^{\infty} dx \int_1^{x+2} dy \right) = \frac{13}{27} \end{aligned} \quad (3 \text{分})$$

四、(每小题 5 分, 共 10 分) 解: (1) 由于  $X \sim P(\lambda)$ , 所以  $E(X) = \lambda$ 。又由所给数据可以

算得

$$\bar{x} = \frac{1}{250} [0 \times 75 + 1 \times 90 + 2 \times 54 + 3 \times 22 + 4 \times 6 + 5 \times 2 + 6 \times 1] = 1.22$$

因此,  $\lambda$  的估计值为  $\hat{\lambda} = \bar{x} = 1.22$ 。.....5 分

$$(2) \text{ 似然函数为 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n 2e^{-2(x_i - \theta)} = 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, x_i \geq \theta,$$

$$\text{对数似然函数为 } \ln L(\theta) = n \ln 2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = n \ln 2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\theta.$$

因为  $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 2n > 0$ , 所以  $\ln L(\theta)$  关于  $\theta$  单调递增, 又  $\theta \leq x_i$ , 故当  $\theta = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$  时,

$\ln L(\theta)$  达到最大值, 从而  $\theta$  的最大似然估计值为  $\hat{\theta} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$  .....5 分

五、(10 分) 设某校经常锻炼的学生的身高 (单位: 厘米)  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , 不经常锻炼的学生的身高 (单位: 厘米)  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。现从该校的这两类学生中各抽出 25 名, 测得其平

均身高分别为  $\bar{x} = 176$  厘米,  $\bar{y} = 172$  厘米, 样本标准差分别为  $s_1 = 5.08$  厘米,  $s_2 = 6.13$  厘米。

试问该校这两类学生的身高是否有显著差异 ( $\alpha = 0.05$ )?

注:  $t_{0.025}(48) = 2.0191$ ,  $t_{0.05}(25) = 1.7108$ ,  $\Phi(1.96) = 0.975$ ,  $F_{0.025}(24, 24) = 2.27$ ,

$F_{0.05}(24, 24) = 1.98$ 。

解:  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$  均未知,  $n_1 = n_2 = 25$ ,  $\bar{x} = 176, \bar{y} = 172$ ,  $s_1^2 = 5.08^2, s_2^2 = 6.13^2$ ,

$$s_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 5.6321 \quad 1 \text{分}$$

4

先检验  $H_0^{(1)}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; H_1^{(1)}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

用 F 检验法，取检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

关于  $H_0^{(1)}$  的拒绝域是  $F < F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$  或  $F > F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

其中， $F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(24, 24) = 2.27$ ，

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.975}(24, 24) = \frac{1}{F_{0.025}(24, 24)} = \frac{1}{2.27} = 0.4406$$

而 F 的观测值  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.6868$ ，由于  $F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < F = \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

所以，接受  $H_0^{(1)}$ ，即可以认为两总体的方差是相同的。.....3 分

再检验  $H_0^{(2)}: \mu_1 = \mu_2; H_1^{(2)}: \mu_1 \neq \mu_2$

用 t 检验法，取检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

关于  $H_0^{(2)}$  的拒绝域为

$$|t| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(48) = 2.0191$$

而 t 的观测值为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 2.5117$$

由于  $|t| = 2.5117 > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(48) = 2.0191$ ，因此拒绝  $H_0^{(2)}$ ，即认为这两类学生的身高有显著的差异。.....6 分

北京邮电大学经管院自动化学院 2011—2012 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B 卷)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一、填空题 (每小题 3 分，共 45 分)

若事件 A 和事件 B 相互独立， $P(A)=a, P(B)=0.3, P(\bar{A} \cup B)=0.7$ ，则

$a=$ \_\_\_\_\_。

甲和乙两个人独立的对一目标各自进行射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为\_\_\_\_\_。

设随机变量  $\xi$  在 (1,6) 上服从均匀分布，则方程  $x^2 + \xi x + 1 = 0$  有实数根的概率为\_\_\_\_\_。

甲、乙、丙三人独立地破译一个密码，他们每个人译出密码的概率均为  $\frac{1}{3}$ ，则密码被译出的概率为\_\_\_\_\_。

设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	-1	1	5
$p$	0.3	C	0.1

$F(x)$  为  $\xi$  的分布函数，则  $F(3)=$ \_\_\_\_\_。

6. 设随机变量  $\xi$  服从参数为  $\lambda=3$  的泊松分布，则  $\frac{E(\xi^2)}{D(\xi)}=$ \_\_\_\_\_。

7. 设随机变量  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{19} e^{-\frac{1}{19}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ，则  $E(-2\xi + 3)=$ \_\_\_\_\_。

8. 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立， $X \sim B(2, \frac{1}{2})$ ， $Y$  服从参数为 1 的泊松分布，则  $E(X - 2Y)=$ \_\_\_\_\_。

9. 设  $D(X)=25, D(Y)=36, \rho_{xy}=0.4$ ，则  $Cov(X, Y)=$ \_\_\_\_\_。

10. 设总体  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	0	1
$p$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自该总体的独立样本，记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，则  $D(\bar{X})=$ \_\_\_\_\_。

11. 设总体  $\xi$  的期望为  $\mu$ ，方差为  $\sigma^2$ ， $(X_1, X_2, X_3)$  为来自  $\xi$  的样本，令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{2}{3}X_3$$

则  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$  中，是  $\mu$  的最有效无偏估计为\_\_\_\_\_。

12. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自正态总体  $N(0, 4)$  的独立随机样本，令

$Y = (X_1 + X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2$ ，则当  $C=$ \_\_\_\_\_时， $CY \sim \chi^2(2)$ 。

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的样本，则统计量  $\frac{\sum_{i=1}^5 X_i^2}{\sum_{i=6}^{10} X_i^2}$  服从

A.  $t(5)$     B.  $t(10)$     C.  $F(5, 5)$     D.  $F(10, 10)$

答案：\_\_\_\_\_。

14. 设  $X \sim N(\mu, 0.3^2)$ ，容量  $n=9$ ，样本均值  $\bar{X}=5$ ，则未知参数  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间是\_\_\_\_\_。(查表  $U_{0.025}=1.96$ )。

15. 设  $X \sim N(10, 0.6), Y \sim N(1, 2)$  且它们相互独立，则  $D(3X + Y)=$ \_\_\_\_\_。

## 二. (15分)

设总体  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha-7)x^{\alpha-8}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 这里  $\alpha > 7$ ,

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$  的样本, 试求 (1)  $\alpha$  的最大似然估计, (2)  $\alpha$  的矩估计.

## 三. (15分)

设  $(X, Y)$  的联合密度为  $f(x, y) = \begin{cases} Ay(1-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

- (1) 求常数 A
- (2) 求关于 X 及 Y 的边缘密度
- (3) X 与 Y 是否独立?

## 四. (10分)

独立地用甲、乙两种工艺对 9 批材料进行生产, 得产品的某项性能指标值. 由实验数据  $x_1, x_2, \dots, x_9$  和  $y_1, y_2, \dots, y_9$  计算得各自的样本均值和样本方差如下:

甲工艺:  $\bar{x} = 52.8, s_x^2 = 7.2$

乙工艺:  $\bar{y} = 50.6, s_y^2 = 4.8$

设甲、乙两种工艺生产的产品的性能指标分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和

$(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

- (1) 在显著水平 0.05 下, 能否认为甲工艺生产的产品的性能指标值大于乙工艺生产的产品的性能指标值?

$t_{0.95}(16) = 1.746, \sqrt{12} = 3.46$

## 五. (15分)

设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1)  $E(XY)$ ;

(2)  $P(X^2 < Y)$ ;

(3) 在  $X = x (0 < x < 1)$  的条件下, Y 的条件概率密度.

北京邮电大学经管院自动化学院 2011—2012 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (B 卷)

填空题或选择题 (每小题 3 分, 共 45 分)

若事件 A 和事件 B 相互独立,  $P(A) = a, P(B) = 0.3, P(\bar{A} \cup B) = 0.7$ , 则

$a = \underline{3/7}$

甲和乙两个人独立的对一目标进行射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标命中, 则它是甲射中的概率为:  $\underline{0.75}$

设随机变量  $\xi$  在 (1,6) 上服从均匀分布, 则方程  $x^2 + \xi x + 1 = 0$  有实数根的概率为:  $\underline{0.8}$

甲、乙、丙三人独立地破译一密码, 他们每个人译出密码的概率均为  $\frac{1}{3}$ , 则密码被译的概率为  $\underline{19/27}$

设随机变量  $\xi$  的概率分布为

	-1	1	5
	0.3	C	0.1

(x) 为  $\xi$  的分布函数, 则  $F(3) = \underline{0.9}$

设随机变量  $\xi$  服从参数为  $\lambda = 3$  的泊松分布, 则  $\frac{E(\xi^2)}{D(\xi)} = \underline{4}$

设随机变量  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{19} e^{-\frac{1}{19}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , 则  $E(-2\xi + 3) = \underline{-35}$

设随机变量 X 和 Y 相互独立,  $X \sim B(2, \frac{1}{2})$ , Y 服从参数为 1 的泊松分布, 则

$(X - 2Y) = \underline{-1}$

设  $D(X) = 25, D(Y) = 36, \rho_{xy} = 0.4$ , 则  $Cov(X, Y) = \underline{12}$

$\xi$	0	1
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自该总体的独立样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则  $D(\bar{X}) = \underline{\frac{6}{25n}}$

11. 设总体  $\xi$  的期望为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $(X_1, X_2, X_3)$  为来自  $\xi$  的样本, 令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{2}{3}X_3$$

则  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$  中, 是  $\mu$  的最有效无偏估计为  $\underline{\hat{\mu}_1}$

12. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自正态总体  $N(0, 4)$  的独立随机样本, 令

$Y = (X_1 + X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2$ , 则当  $C = \underline{1/8}$  时,  $CY \sim \chi^2(2)$

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的样本, 则统计量  $\frac{\sum_{i=1}^5 X_i^2}{\sum_{i=6}^{10} X_i^2}$  服从

A.  $t(5)$     B.  $t(10)$     C.  $F(5, 5)$     D.  $F(10, 10)$

答案: C

14. 设  $X \sim N(\mu, 0.3^2)$ , 容量  $n=9$ , 样本均值  $\bar{X} = 5$ , 则未知参数  $\mu$  的置信度

为 0.95 的置信区间是  $\underline{(4.804, 5.196)}$ . (查表  $U_{0.025} = 1.96$ ).

15. 设  $X \sim N(10, 0.6), Y \sim N(1, 2)$  且它们相互独立, 则  $D(3X + Y) = \underline{7.4}$

二: (15 分)

设总体  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha - 7)x^{\alpha-8}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 这里  $\alpha > 7$ ,

解：(1) 似然函数为

$$L(\alpha) = (\alpha - 7)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-8} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\ln L(\alpha) = n \ln(\alpha - 7) + (\alpha - 8) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha - 7} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

解得  $\alpha$  的最大似然估计

$$\hat{\alpha} = 7 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} \quad (3 \text{ 分})$$

$$(2) \int_0^1 x(\alpha - 7)x^{\alpha-8} dx = \frac{\alpha - 7}{\alpha - 6} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{\alpha - 7}{\alpha - 6} = \bar{X}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } \alpha \text{ 的矩估计为 } \alpha = \frac{7 - 6\bar{X}}{1 - \bar{X}} \quad (2 \text{ 分})$$

∴ (15 分)

$(X, Y)$  的联合密度为  $f(x, y) = Ay(1-x), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ ,

(1) 求常数 A

(2) 求关于 X 及 Y 的边缘密度

(3) X 与 Y 是否独立?

解：(1)

$$\int_0^1 \int_0^x Ay(1-x) dy dx = 1, \text{ 解得 } A = 24$$

2)

$$f_X(x) = \int_0^x 24y(1-x) dy = 12x^2(1-x), \text{ 所以}$$

0, 其他

$$\text{同理, } f_Y(y) = \int_y^1 24y(1-x) dx = 12y(1-y)^2,$$

$$\text{所以 } f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 24y(1-x) dx = 12y(1-y)^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 因为 } f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$$

所以不独立。  $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

四. 10 分

独立地用甲、乙两种工艺对 9 批材料进行生产，得产品的某项性能指标值。由试验数据  $x_1, x_2, \dots, x_9$  和  $y_1, y_2, \dots, y_9$  计算得各自的样本均值和样本方差如下：

$$\text{甲工艺: } \bar{x} = 52.8, \quad s_x^2 = 7.2$$

$$\text{乙工艺: } \bar{y} = 50.6, \quad s_y^2 = 4.8$$

设甲、乙两种工艺生产的产品的性能指标分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

(1) 在显著水平 0.05 下，能否认为甲工艺生产的产品的性能指标值大于乙工艺生产的产品的性能指标值?

$$(t_{0.05}(16) = 1.746, \sqrt{12} = 3.46)$$

解：(1) 依题意需检验假设

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \text{ 对 } H_1: \mu_1 > \mu_2$$

检验统计量为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

该假设检验问题的拒绝域为

1. 样本值算得检验统计量的观测值为

$$t = \frac{52.8 - 50.6}{\sqrt{\frac{8 \times 7.2 + 8 \times 4.8}{16} \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}}} = 1.9075$$

易见, 样本落入拒绝域, 所以拒绝原假设, 即可以认为甲工艺生产的产品的性能指标大于乙工艺生产的产品的性能指标. ....10 分

五. (15 分)

1.  $(X, Y)$  的概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求(1)  $E(XY)$ ; (2)  $P(X^2 < Y)$ ;

(3) 在  $X = x (0 < x < 1)$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度.

$$(1) E(XY) = \int_0^1 \int_0^x xy p(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^x 2xy(x+y) dy dx = \int_0^1 \frac{5}{3} x^4 dx = \frac{1}{3}; \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) P(X^2 < Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^x 2(x+y) dy dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x^3 - x^4) dx = \frac{3}{10}; \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(3) 当  $x \in (0, 1)$  时,

$p_X(x) = \int_0^x 2(x+y) dy = 3x^2$ , 所以在  $X = x (0 < x < 1)$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度为

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{3x^2}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 24y(1-x) dy = 12x^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{同理, } f_Y(y) = \int_0^1 24y(1-x) dx = 12y(1-y)^2,$$

$$\text{所以 } f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 24y(1-x) dx = 12y(1-y)^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

(3) 因为  $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$

所以不独立. ....3 分

四. (10 分)

独立地用甲、乙两种工艺对 9 批材料进行生产, 得产品的某项性能指标值. 由试验数据  $\bar{x}_1, x_2, \dots, x_9$  和  $y_1, y_2, \dots, y_9$  计算得各自的样本均值和样本方差如下:

$$\text{甲工艺: } \bar{x} = 52.8, \quad s_x^2 = 7.2$$

$$\text{乙工艺: } \bar{y} = 50.6, \quad s_y^2 = 4.8$$

设甲、乙两种工艺生产的产品的性能指标分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

(1) 在显著水平 0.05 下, 能否认为甲工艺生产的产品的性能指标值大于乙工艺生产的产品的性能指标值?

$$(t_{0.05}(16) = 1.746, \sqrt{12} = 3.46)$$

解: (1) 依题意需检验假设

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \text{ 对 } H_0: \mu_1 > \mu_2$$

检验统计量为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

该假设检验问题的拒绝域为



北京邮电大学 2010—2011 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末参考答案 (A 卷)

注意：所有题目的答案及解答必须写在答题纸上，写在试题纸上不得分。

一、填空题 (每题 4 分，共 40 分)：

1. 一种零件由三道相互独立的工序加工完成，一个零件若在任何一道工序出废品则该零件即为废品。设  $A_i$  表示“某零件在第  $i$  道工序出废品” ( $i=1, 2, 3$ )，则一零件是正品可用  $A_i$  表示为  $\overline{A_1 A_2 A_3}$ ；
2. 已知  $P(A)=0.3$ ， $P(B|A)=0.5$ ，则  $P(AB)=$  0.15；
3. 设离散型随机变量  $X$  的分布律为： $P\{X=-1\}=0.2$ ， $P\{X=1\}=0.5$ ， $P\{X=3\}=0.3$ ，则  $X$  的分布函数为 \_\_\_\_\_；
4. 设  $X \sim N(3, 2^2)$ ，且  $aX+b \sim N(0, 1)$ ，则  $a=$   $-1/2$ ， $b=$   $-3/2$ ；
5. 随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)=\begin{cases} 0, & x < 0 \\ a, & 0 \leq x < 1, \text{ 且 } E(X^2)=0.5, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ ，则  $a=$  0.5；
6. 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，且方程  $y^2 + 4y + X = 0$  无实根的概率为  $\frac{1}{2}$ ，则  $\mu=$  4；
7. 设  $X \sim U(-1, 1)$ ， $Y=\begin{cases} -1, & X < 0, \\ 1, & X \geq 0, \end{cases}$  则  $D(Y)=$  1；
8. 设  $(X, Y)$  的分布律为

X \ Y	0	1
0	1/4	a
1	b	1/4

已知事件  $\{X=0\}$  与  $\{X+Y=1\}$  相互独立，则  $a=$   $1/4$ ， $b=$   $1/4$ ；

9. 置信度  $1-\alpha$  确定以后，参数的置信区间是 唯一 (唯一，不唯一) 确定的；

10. 设某地区六月平均气温  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，观察九天得  $\bar{x} = 30^\circ\text{C}$ ， $s = 0.5^\circ\text{C}$ ，则此地六月平均气温置信水平为 0.95 的置信区间为 (29.31, 30.69)。

二、选择题 (每题 4 分，共 20 分)：

1. 设随机变量  $X$  服从  $(-2, 2)$  上的均匀分布，则随机变量  $Y=2X$  的概率密度函数为  $f_Y(y) =$  ( 2 )。

$$(1) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -4 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & -4 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & -2 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

2. 如果随机变量  $X, Y$  满足  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ，则必有 ( 2 )。

(1)  $X$  与  $Y$  独立 (2)  $X$  与  $Y$  不相关 (3)  $E(Y) = 0$  (4)  $E(X) = 0$

3. 设总体  $X \sim N(12, 2^2)$ ，抽取容量为 25 的样本， $\bar{X}$  表示样本均值，则  $P\{\bar{X} > 12.2\}$  为 ( 4 )。(  $\Phi(0.5) = 0.6915$  )

(1) 0 (2) 1 (3) 0.6915 (4) 0.3085

4.  $X_1, X_2, X_3$  是取自方差大于 0 的总体  $X$  的样本， $Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ ， $Y_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$ ， $Y_3 = \frac{2X_1 - X_2 + 2X_3}{3}$ ， $Y_4 = X_1$ ，则其中对总体均值  $\mu$  的最有效估计是 ( 1 )。

(1)  $Y_1$  (2)  $Y_2$  (3)  $Y_3$  (4)  $Y_4$

5. 检验假设  $H_0: \sigma^2 \leq 10^2$ ， $H_1: \sigma^2 > 10^2$  时，取统计量  $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{10^2} \sim \chi^2(n)$ ，则其拒域为 ( 2 )。(  $\alpha = 0.1$  )

(1)  $\chi^2 \leq \chi_{0.1}^2(n)$ ；(2)  $\chi^2 \geq \chi_{0.1}^2(n)$ ；(3)  $\chi^2 \leq \chi_{0.05}^2(n)$ ；(4)  $\chi^2 \geq \chi_{0.05}^2(n)$

### 三、解答题

1. (10分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数  $f(x, y) = \begin{cases} kx, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  求

(1) 常数  $k$  及  $X$  的边缘概率密度; (2) 当  $X = x$  时,  $Y$  的条件密度函数  $f_{Y|X}(y|x)$ ;

(3)  $P(X+Y \leq 1)$ .

解(1)  $\int_0^1 \int_x^1 kx dy = 1, k = 6$  (2分)

当  $0 < x < 1$  时  $f_X(x) = \int_x^1 6x dy = 6x(1-x)$  故

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2分)$$

(2) 当  $0 < x < 1$  时, (1分)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2分)$$

(3)  $P(X+Y \leq 1) = \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} 6x dy dx = \int_0^{1/2} 6x(1-2x) dx = \frac{1}{4}$  (3分)

2. (10分) (1) 设  $\xi = aX+b, \eta = cY+d$  ( $a, c$  同号), 证明:  $\rho_{\xi\eta} = \rho_{XY}$ .

$$\begin{aligned} \text{证 } \rho_{\xi\eta} &= \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi)} \cdot \sqrt{D(\eta)}} = \frac{E[(\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))]}{|ac| \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} \\ &= \frac{E[(aX+b-aE(X)-b)(cY+d-cE(Y)-d)]}{|ac| \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} \\ &= \frac{E[ac(X-E(X))(Y-E(Y))]}{|ac| \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{acE[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{|ac| \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \rho_{XY} \end{aligned}$$

(2) 设总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2$  是来自总体  $X$  的样本, 设统计量  $T = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2}$ ,

问  $T$  服从何分布?

解  $\because X_1 \sim N(0, \sigma^2), X_2 \sim N(0, \sigma^2),$

$$\therefore \left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1), \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

$$\therefore T = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} \sim F(1, 1)$$

3. (每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 设某市每天被查出醉酒驾驶的人数  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布,  $\lambda > 0$  为未知参数.

现连续观察了 12 天, 得样本观测值: 2, 1, 2, 3, 2, 0, 5, 4, 3, 1, 0, 6. 求  $\lambda$  的矩估计值.

(2) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\theta > 1$  是未知参数,  $X_1, \dots, X_n$  是来自  $X$  的容量为  $n$  的样本,  $x_1, \dots, x_n$  是其一组观测值.

求  $\theta$  的极大似然估计量.

解:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 2.4167$ , (2分)

$EX = \lambda$ , (2分)

令  $EX = \lambda = \bar{x}$ , 得  $\lambda$  的矩估计值为  $\hat{\lambda} = 2.4167$  (1分)

(2)

解: 似然函数  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = \theta^{\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$  (2分)

取对数得  $\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln \theta + (\sqrt{\theta} - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$ , (2分)

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

解之得 $\theta$ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = n^2 / (\sum_{i=1}^n \ln x_i)^2$ , (1分)

4. (10分) 已知某种钢筋强度 $X \sim N(52, \sigma^2)$ , 现改变炼钢配方, 利用新配方炼了7炉钢,

并从此7炉钢生产的钢筋中分别各抽取一根, 测得强度为:

52.45; 48.51; 56.02; 51.53; 49.02; 53.08; 54.04

计算得样本标准差为2.7, 问

(1) 用新法炼的钢生产的钢筋强度的均值是否有明显提高? ( $\alpha = 0.05$ ) 即检验 $H_0: \mu \leq 52$ .

(2) 求参数 $\sigma^2$ 的区间估计( $1 - \alpha = 0.95$ ).

附注:

$t_{0.025}(8) = 2.306$ ,  $t_{0.01}(8) = 2.897$ ,  $t_{0.005}(8) = 3.355$ ,  $t_{0.01}(9) = 2.821$ ,  $t_{0.005}(9) = 3.250$ ,

$t_{0.05}(6) = 1.9432$ ;

$\chi_{0.975}^2(6) = 1.24$ ,  $\chi_{0.025}^2(6) = 14.4$ ,  $\chi_{0.01}^2(9) = 21.666$ ,  $\chi_{0.005}^2(8) = 21.955$ ,

$\chi_{0.01}^2(8) = 20.090$ .

解:

(1) 检验假设 $H_0: \mu \leq 52 \Leftrightarrow H_1: \mu > 52$

用 $t$ 检验法. 检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ ,

拒绝域为 $t \geq t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(6) = 1.9432$  (2分) (统计量1分, 拒绝域1分)

$\bar{x} = 52.14$ ,  $s = 2.70$ ,  $t = 0.14 < 1.9432$ .

所以接受原假设, 既可以认为钢筋强度的均值无明显提高. (2分)

(2) 取枢轴量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ,  $P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\} = 1 - \alpha$

$\chi_{0.025}^2(6) = 14.4$ ,  $\chi_{0.975}^2(6) = 1.24$ ,

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} = 35.27, \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} = 3.04,$$

于是参数 $\sigma^2$ 的置信区间为 $(3.04, 35.27)$ .

(1分)

北京邮电大学 2010—2011 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A)

注意：学生必须将答案及解答写在试题答题纸上，写在试题纸上一律无效。

一、填空题 (每题 4 分，共 60 分)：

1. 若以 A 表示事件“甲产品畅销，且乙产品滞销”，则  $\bar{A}$  表示事件“\_\_\_\_\_”；
2. 一袋中装有 10 只球，其中 3 只黑球，7 只白球，连续进行无放回取球，每次从袋中任取一球。若已知第二次取出的是黑球，则第一次取出的也是黑球的概率为\_\_\_\_\_；
3. 设随机变量 X 的分布律为： $P(X=-1)=0.2$ ， $P(X=0)=0.1$ ， $P(X=1)=0.5$ ， $P(X=2)=0.2$ ， $F(x)$  是 X 的分布函数，则  $F(0.5)=$ \_\_\_\_\_；
4. 设  $P(X \geq 0, Y \geq 0) = 0.3$ ， $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = 0.4$ ，则  $P\{\max(X, Y) \geq 0\} =$ \_\_\_\_\_；
5. 设  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$  是某随机变量 X 的分布函数，则  $A =$ \_\_\_\_\_；
6. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数  $\rho =$ \_\_\_\_\_；
7. 设随机变量 X 服从均值为 5 的指数分布，则  $P(X > \sqrt{D(X)}) =$ \_\_\_\_\_；
8. 设 X 和 Y 是独立同分布的随机变量，且  $P(X=1)=p$ ， $P(X=0)=1-p$ ， $0 < p < 1$ ，若  $Z = \begin{cases} 0, & \text{当 } X+Y = \text{偶数} \\ 1, & \text{当 } X+Y = \text{奇数} \end{cases}$  与 X 独立，则  $p =$ \_\_\_\_\_；
9. 设随机变量 X 的均值与方差分别为 3 和 4，则由切比雪夫不等式知  $P(|X-3| \geq 4) \leq$ \_\_\_\_\_；
10. 某保险公司的统计资料表明，在索赔案中被盗索赔的比例为 20%。以 X 表示随机抽查的 100 个索赔案中被盗索赔的件数，由中心极限定理可知， $P(14 \leq X \leq 30) \approx$ \_\_\_\_\_；
11. 设  $X_1, \dots, X_n$  是取自总体 X 的样本， $\bar{X}$  和  $S^2$  分别是样本均值和样本方差，

$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ ，若  $(\bar{X})^2 - CS^2$  为  $\mu^2$  的无偏估计，则  $C =$ \_\_\_\_\_；

12. 设随机变量  $X \sim N(1, 1)$ ， $u_\alpha$  是标准正态分布  $N(0, 1)$  的上  $\alpha$  分位点，若

$P(|X-1| < x) = \alpha$ ，则  $x =$ \_\_\_\_\_。

13. 设  $X_1, \dots, X_n (N > 2)$  为来自总体  $N(0, 1)$  的简单随机样本，则  $(n-1)X_1^2 / \sum_{i=2}^n X_i^2 \sim$ \_\_\_\_\_；

14. 设  $Y = \ln X$  服从正态分布  $N(\mu, 4)$ ，若有总体 X 的容量为 4 的样本观测值：0.5, 1.25, 0.8,

2.0，则  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间为\_\_\_\_\_；

15. 在显著性检验中，减小显著性水平  $\alpha$ ，就意味着使“犯第\_\_\_\_\_类错误”的概率减小。

二、(10 分) 设随机变量 X 的概率密度为  $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ ， $-\infty < x < \infty$ ，求：(1) 常数 c；(2)

X 的分布函数  $F_X(x)$ ；(3)  $Y = 3X + 2$  的概率密度  $f_Y(y)$ 。

三、(10 分) 已知  $X \sim U[0, 1]$ ，且在  $X = x (0 < x < 1)$  的条件下，Y 服从  $(0, x)$  上的均匀分布。

求：(1)  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ ；(2) Y 的概率密度  $f_Y(y)$ ；(3)  $P(X+Y > 1)$ 。

四、(10 分) 设总体 X 的概率密度为  $f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$ ， $-\infty < x < \infty$ ，其中  $\theta > 0$  是未知参数。

若  $X_1, \dots, X_n$  是来自于 X 的样本，试求  $\theta$  的矩估计量和极大似然估计量。

五、(10 分) 两家工商银行分别对 21 个储户和 16 个储户的年存款金额进行抽样调查，得到其年平均存款金额分别为 2600 元和 2700 元，样本标准差相应为 81 元和 105 元。假设年存款金额服从正态分布，试比较两家银行储户的平均年存款金额有无显著差异 ( $\alpha = 0.10$ )。

附注： $\Phi(2.5) = 0.994$ ， $\Phi(1.5) = 0.933$ ， $F_{0.05}(15, 20) = 2.2$ ， $F_{0.05}(20, 15) = 2.33$ ，

$t_{0.05}(35) = 1.69$ ， $t_{0.1}(35) = 1.31$ ， $u_{0.025} = 1.96$ ， $u_{0.05} = 1.65$ ， $\chi_{0.05}^2(15) = 25.00$ ，

$\chi_{0.05}^2(20) = 31.41$ ， $\chi_{0.1}^2(15) = 22.31$ ， $\chi_{0.1}^2(20) = 28.41$

北京邮电大学 2010—2011 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末试题 (A) 参考答案及评分标准

一、填空题 (每题 4 分, 共 60 分):

1. “甲产品滞销, 或乙产品畅销”;

2.  $\frac{2}{9}$ ;

3.  $0.3$ ;

4.  $0.5$ ;

5.  $1$ ;

6.  $-1$ ;

7.  $\frac{1}{e}$ ;

8.  $\frac{1}{2}$ ;

9.  $\frac{1}{4}$ ;

10.  $0.927$ ;

11.  $\frac{1}{n}$ ;

12.  $u_{\alpha/2}$ ;

13.  $t(n-1)$   $F(1, n-1)$

14.  $(-1.96, 1.96)$ ;

15.  $-$ .

二、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ , 求: (1) 常数  $c$ ; (2)

$X$  的分布函数  $F_X(x)$ ; (3)  $Y = 3X + 2$  的概率密度  $f_Y(y)$ .

解: (1) 因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx = c \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi c = 1$ , (公式、积分各 1 分)

所以  $c = \frac{1}{\pi}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ,  $-\infty < x < \infty$  (1 分)

$$(2) F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2} \quad (2 \text{ 分})$$

(3)  $y = 3x + 2$  严格单调、可导, 其反函数  $x = g(y) = \frac{y-2}{3}$  的导数

$$g'(y) = \frac{1}{3} \quad (2 \text{ 分})$$

所以  $f_Y(y) = f_X[g(y)] \cdot |g'(y)|$  (1 分)

$$= \frac{1}{3\pi \left[ 1 + \left( \frac{y-2}{3} \right)^2 \right]} = \frac{3}{\pi(y^2 - 4y + 13)} \quad (1 \text{ 分})$$

按分布函数法解答, 分布函数的定义 1 分、转化 1 分, 表达式 1 分, 求导 1 分

三、(10 分) 已知  $X \sim U[0, 1]$ , 且在  $X = x$  ( $0 < x < 1$ ) 的条件下,  $Y$  服从  $(0, x)$  上的均匀分布。

求: (1)  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ ; (2)  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ; (3)  $P(X + Y > 1)$ 。

解: (1) (4 分)

由题意可知

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 且当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

所以, 当  $0 < x < 1$  时,  $f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

当  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$  时, 由  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 0$  且  $f(x, y) \geq 0$  可得  $f(x, y) = 0$ 。

$\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\text{故 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

(2) (3 分)

当  $0 < y < 1$  时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

当  $y \leq 0$  或  $y \geq 1$  时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

(3) (3 分)

$$P(X + Y > 1) = \iint_{x+y>1} f(x, y) dx dy \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 \frac{1}{x} dy \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \int_0^1 \left( 2 - \frac{1}{x} \right) dx = 1 - \ln 2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

四、(10 分) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, -\infty < x < \infty$ , 其中  $\theta > 0$  是未知参数。

若  $X_1, \dots, X_n$  是来自于  $X$  的样本, 试求  $\theta$  的矩估计量和极大似然估计量。

解: (1) 矩估计

由于  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = 0$ , 不含  $\theta$ , 所以计算  $E(X^2)$ :  $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 2\theta^2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{令 } E(X^2) = 2\theta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

解之得  $\theta$  的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

注: 由于矩估计不唯一, 用其它方程求解的可参照上述解法评分。

$$(2) \text{ 似然函数为 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x_i|}{\theta}} = (2\theta)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|\right] \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{对数似然函数为 } \ln L(\theta) = -n \ln 2 - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i| \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ 得似然方程}$$

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{解之得 } \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

五、(10 分) 两家工商银行分别对 21 个储户和 16 个储户的年存款金额进行抽样调查, 得到其年平均存款金额分别为 2600 元和 2700 元, 样本标准差相应为 81 元和 105 元。假设年存款金额服从正态分布, 试比较两家银行储户的平均年存款金额有无显著差异 ( $\alpha = 0.10$ )。

附注:  $\Phi(2.5) = 0.994$ ,  $\Phi(1.5) = 0.933$ ,  $F_{0.05}(15, 20) = 2.2$ ,  $F_{0.05}(20, 15) = 2.33$ ,

$t_{0.05}(35) = 1.69$ ,  $t_{0.1}(35) = 1.31$ ,  $u_{0.025} = 1.96$ ,  $u_{0.05} = 1.65$ ,  $\chi_{0.05}^2(15) = 25.00$ ,

$\chi_{0.05}^2(20) = 31.41$ ,  $\chi_{0.1}^2(15) = 22.31$ ,  $\chi_{0.1}^2(20) = 28.41$

解: 设两家银行储户的年存款金额分别为  $X$  和  $Y$ , 由题意知:  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,

且对于来自总体 X 的样本有： $n_1 = 21, \bar{x} = 2600, s_1 = 81$ ；对于来自总体 Y 的样本有：

$n_2 = 16, \bar{y} = 2700, s_2 = 105$ ，要作关于  $\mu_1, \mu_2$  的假设检验。.....1 分

由于  $\sigma_1, \sigma_2$  未知，因此

(1) 先检验假设  $H_0^{(1)}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; H_1^{(1)}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  .....1 分

用 F 检验法，检验统计量  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 。.....1 分

$H_0^{(1)}$  的拒绝域为： $F < F_{0.95}(20, 15) = \frac{1}{F_{0.05}(15, 20)} \approx 0.45$  或  $F > F_{0.05}(20, 15) = 2.33$ 。(1 分)

计算得 F 的样本值  $F = \frac{81^2}{105^2} = 0.5951$ ，由于  $F_{0.95}(20, 15) < F < F_{0.05}(20, 15)$ ，所以可以接受

$H_0^{(1)}$ ，既可以认为  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 。.....(1 分)

(2) 再检验假设  $H_0^{(2)}: \mu_1 = \mu_2; H_1^{(2)}: \mu_1 \neq \mu_2$  ..... (1 分)

由 (1) 知  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，故用 t 检验法，检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ ，

其中， $S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ 。.....(1 分)

$H_0^{(2)}$  的拒绝域为  $|t| > t_{0.05}(35) = 1.69$  ..... (1 分)

因为 t 的样本值  $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 3.067 > t_{0.05}(35)$ ，所以拒绝  $H_0^{(2)}$ ，即对于题述样本，在显

著性水平  $\alpha = 0.10$  下，可以认为两家银行储户的平均年存款金额有显著差异。

(样本值 1 分、推断 1 分，共 2 分)

北京邮电大学经济管理学院 2009—2010 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (B 卷)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 45 分)

1. 已知  $P(A)=0.7, P(B)=0.4, P(AB)=0.5$ , 则  $P(A|B)=$  0.5 .

2. 一批产品共 50 件, 其中有 3 件不合格, 从中逐件不放回的取 3 次产品, 则第二次取得是不合格产品的概率为  $\frac{3}{50}$  .

3. 设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	-1	0	1	2
p	0.3	0.2	0.1	0.4

$F(x)$  为  $\xi$  的分布函数, 则  $F(0.5)=$  0.5 .

4. 设随机变量  $\xi$  服从参数为 3 的泊松分布, 则  $E(\xi^2)=$  12 .

5. 设随机变量  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x)=\begin{cases} Cx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则常数  $C=$  3 .

6. 若随机变量  $\xi$  服从  $(1, 6)$  上的均匀分布, 则方程  $x^2 + \xi x + 1 = 0$  有实数根的概率为 0.8 .

7. 已知  $D(\xi)=1, D(\eta)=3$ , 且  $\xi$  和  $\eta$  相互独立, 则  $D(2\xi - 3\eta)=$  31 .

8. 设总体  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	0	1
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自该总体的样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则  $E(\bar{X})=$   $\frac{9}{5}$  .

9. 设随机变量  $X \sim N(0, 1), Y \sim N(2, 9)$ , 且  $X$  和  $Y$  相互独立, 则随机变量

$Z = 2X - Y + 1$  服从分布  $N(-1, 13)$  .

10. 随机变量  $X \sim F(n, m)$ , 则  $\frac{1}{X} \sim$   $F(m, n)$  .

11. 设  $\xi \sim N(5, 16)$ , 已知标准正态分布函数值  $\Phi_0(0.25)=0.5987$ , 则  $P(\xi > 6)=$  0.4013 .

12. 设  $\xi \sim B(n, p)$ , 且已知  $E(\xi)=6, D(\xi)=3.6$ , 则  $n, p$  分别为 15, 0.4 .

13. 设总体  $\xi$  的期望为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $(X_1, X_2, X_3)$  为来自  $\xi$  的样本, 令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6}X_1 - X_2 + \frac{2}{3}X_3, \hat{\mu}_3 = X_3$$

则  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  中是  $\mu$  的最有效无偏估计为  $\hat{\mu}_1$  .

14. 总体未知参数  $\theta$  的极大似然估计  $\hat{\theta}$  就是 似然 函数的极大值点.

15. 若总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的一个随机样本,

则  $\mu$  的极大似然估计为  $\frac{1}{n} \sum X_i$ ,  $\sigma^2$  的矩估计为:  $\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$

二、(15 分)

设二元随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x-2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 边缘概率密度; (2) 概率  $P\{Y > X^2\}$

$$\text{解: (1) } \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = \int_0^1 (x-2y) dy = x-1, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

同理可得



$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{2} - 2y \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (8 \text{ 分})$$

$$(2) P\{Y > X^2\} = \iint_{D: y > x^2} \varphi(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x - 2y) dy$$

$$= \frac{29}{20} \quad (7 \text{ 分})$$

三、(15 分)

设二元随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} Cx^2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $C$ ; (2) 边缘概率密度;  $P\{X+Y < 1\}$

$$\text{解: (1) } 1 = \iint_D \varphi(x, y) dx dy = C \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y dy = \frac{C}{6}$$

$$C=6.$$

(5 分)

$$(1) \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = \int_0^1 6x^2y dy = 3x^2, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

同理可得

$$\varphi_Y(y) = 2y \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) P\{X+Y < 1\} = \iint_{D: x+y < 1} \varphi(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 6x^2y dy$$

$$= 6 \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \quad (5 \text{ 分})$$

四、(10 分)

某个工厂对铝的溶化点做了 4 次试验, 其结果如下 (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ):

1550, 1540, 1530, 1560

并设溶化点服从正态分布, 试在置信水平  $\alpha = 0.05$  下, 求溶化点期望值的置信区间 (已知双侧临界点  $t_{0.025}(3) = 3.182$ )

$$\text{解: 经计算, 得 } \bar{x} = 1545, s^2 = 256 \quad (4 \text{ 分})$$

于是得置信上、下限分别为

$$\bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = 1545 + 3.182 \times \sqrt{\frac{256}{4}} = 1570.46 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = 1545 - 3.182 \times \sqrt{\frac{256}{4}} = 1519.54 \quad (3 \text{ 分})$$

从而得溶点期望的置信区间  $[1519.54, 1570.46]$ .

五、(15 分)

设总体  $X$  的概率密度为  $\varphi(x, \alpha) = \begin{cases} (\alpha+2)x^{\alpha+1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$

的样本, 试求 (1)  $\alpha$  的最大似然估计, (2)  $\alpha$  的矩估计.

解: (1) 似然函数为

$$L(\alpha) = (\alpha+2)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha+1} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\ln L(\alpha) = n \ln(\alpha+2) + (\alpha+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha+2} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

解得  $\alpha$  的最大似然估计

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 2 \quad (3 \text{ 分})$$

$$(2) \int_0^1 x(\alpha+2)x^{\alpha+1} dx = \frac{\alpha+2}{\alpha+3}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{\alpha+2}{\alpha+3} = \bar{X}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } \alpha \text{ 的矩估计为 } \alpha = \frac{3\bar{X}-2}{1-\bar{X}}. \quad (2 \text{ 分})$$

北京邮电大学 2009—2010 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期末考试答案 (B)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一、填空题 (45 分，每空 3 分)

1. 设两两独立的事件  $A, B, C$  满足  $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$ ，且

$$P(A \cup B \cup C) = 9/16, \text{ 则 } P(A) = \underline{1/4}$$

2. 袋中有 5 个球，其中 1 个红球，每次从中任取 1 个球，取出后不放回，问前 3 次取到红球的概率为  $\underline{3/5}$ 。

3. 设平面区域  $D$  由  $x=1, y=0, y=x$  围成，平面区域  $D_1$  由  $y=x^2, y=x$  围成。现向  $D$  内依次随机投掷质点，问第 3 次投掷的质点恰好第二次落在  $D_1$  内的概率是

$$\underline{4/27}.$$

4. 设随机变量  $X$  的概率分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{问 } B = \underline{-1}.$$

5. 随机变量  $k$  在  $(-5, 5)$  上服从均匀分布，即  $k \sim U(-5, 5)$ ，则方程

$$4x^2 + 4kx + k + 2 = 0 \text{ 有实根的概率为 } \underline{7/10}$$

6. 设随机变量序列  $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$  独立同分布于  $(-3, 3)$  上的均匀分布，即  $X \sim U(-3, 3)$ ，

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i < 0\right\} = \underline{1/2}.$$

7. 已知随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ，定义函数  $g(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ ，求  $Y = g(X)$  的密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi}, & y \in (0, \sqrt{2\pi}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

8. 设随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  的均匀分布，求

$$D(X+Y) = \underline{1/6}.$$

9. 设  $X \sim N(3, 4)$  满足  $P\{X > C\} = P\{X \leq C\}$ ，则  $C = \underline{3}$ 。

10. 设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	-2	0	3	5
$p$	0.1	0.1	0.4	0.4

$$-F(x) \text{ 为 } \xi \text{ 的分布函数，则 } F(4) = \underline{0.6}.$$

11. 设随机变量  $X \sim t(n)$ ，则  $X^2 \sim \underline{F(1, n)}$

12. 设总体  $\xi$  的期望为  $\mu$ ，方差为  $\sigma^2$ ， $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$  的样本，令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6} X_2 + \frac{2}{7} X_3, \hat{\mu}_3 = X_3,$$

$$\text{则 } \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3 \text{ 中是 } \mu \text{ 的最有效无偏估计为 } \underline{\hat{\mu}_1}$$

13. 若总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的一个随机样本，

$$\text{则 } \mu \text{ 的矩估计为 } \underline{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}, \sigma^2 \text{ 的极大似然估计为: } \underline{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

14. 设随机变量  $X$  服从参数为  $p(0 < p < 1)$  的 0-1 分布， $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的样本，则  $E(S^2) = \underline{\sigma^2}$ 。

15. 设总体  $X$  的方差为 1，来自  $X$  的容量为 100 的简单随机样本测得均值为 5，则  $X$  的期望的置信系数等于 0.95 的置信区间为  $\underline{[4.8, 5.2]}$ 。

$$(Z_{0.025} = 1.96)$$

二. (15分)

设A, B为两个随机事件, 且  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求(1) 二维随机变量(X, Y)的分布律,

(2) X, Y的相关系数,

(3)  $Z = X^2 + Y^2$  的分布律.

解(1)  $P(AB) = P(A)P(B|A) = 1/12$ ,  $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = 1/6$ ,

$$\begin{cases} P(X=1, Y=1) = P(AB) = 1/12, \\ P(X=1, Y=0) = P(\overline{A}B) = 1/6, \\ P(X=0, Y=1) = P(A\overline{B}) = 1/12, \\ P(X=0, Y=0) = P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 2/3, \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$$

(2)  $E(X) = P(A) = 1/4$ ,  $E(Y) = P(B) = 1/6$ ,  $E(XY) = 1/12$

所以, 
$$\begin{cases} \text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = 1/24, \\ EX^2 = P(A) = 1/4, EY^2 = P(B) = 1/6, \\ DX = EX^2 - (EX)^2 = 3/16, \\ DY = EY^2 - (EY)^2 = 5/36, \end{cases}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DXDY}} = 1/\sqrt{15} \quad (5 \text{ 分})$$

(3)  $Z = X^2 + Y^2$  的取值为 0, 1, 2.

$$\begin{cases} P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = 2/3, \\ P(Z=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) = 1/4, \\ P(Z=2) = P(X=1, Y=1) = 1/12 \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$$

三. (15分)

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ , (2) 求条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ ,  $f_{X|Y}(x|y)$ , (3) 求条件

概率  $P(X \leq 1 | Y \leq 1)$ .

解(1)

$$f_X(x) = \int_0^x f(x, y) dy = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$$

(2)

$$\text{当 } x > 0, f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 1/x, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 当 } x \leq 0, \text{ 不存在.}$$

$$\text{当 } y > 0, f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} e^{y-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 当 } y \leq 0, \text{ 不存在.} \quad (5 \text{ 分})$$

$$(3) P(Y \leq 1) = 1 - e^{-1}, P(X \leq 1, Y \leq 1) = 1 - 2e^{-1},$$

$$\text{所以 } P(X \leq 1 | Y \leq 1) = \frac{P(X \leq 1, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{e-2}{e-1} \quad (5 \text{ 分})$$

四. (15分)

设总体  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha-5)x^{\alpha-6}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$  的

样本, 试求 (1)  $\alpha$  的最大似然估计, (2)  $\alpha$  的矩估计.

解: (1) 似然函数为

$$L(\alpha) = (\alpha-5)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-6} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\ln L(\alpha) = n \ln(\alpha-5) + (\alpha-6) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha-5} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

解得  $\alpha$  的最大似然估计

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 5 \quad (3 \text{ 分})$$

$$(2) \int_0^1 x(\alpha-5)x^{\alpha-6} dx = \frac{\alpha-5}{\alpha-4}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{\alpha-5}{\alpha-4} = \bar{X}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } \alpha \text{ 的矩估计为 } \alpha = \frac{5-4\bar{X}}{1-\bar{X}}. \quad (2 \text{ 分})$$

## 五、(10 分)

新旧两个水稻品种进行对比试验, 假定产量都服从正态分布, 旧品系共分成 25 个小区,

平均产量  $\bar{x}_1 = 35.65$  公斤, 样本的标准差  $s_1 = 2.32$  公斤; 新品系共分成 20 个小区, 平均产

量  $\bar{x}_2 = 37.35$  公斤, 样本的标准差为  $s_2 = 1.89$  公斤; 问新品系是否优于旧品系? (假定新

旧品系方差相等) ( $\alpha = 0.05, t_{43}(0.05) = 1.681$ ).

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 < \mu_2. \quad (3 \text{ 分})$$

用 t 检验法,  $H_0$  成立时统计量为:  $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ , -----3 分

代入样本值计算得

$$S_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)} = \frac{24 \times 2.32^2 + 19 \times 1.89^2}{43} = 4.583$$

$$S_w = 2.141. \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{因此得到 } t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{35.65 - 37.35}{2.141 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}}} = -2.647.$$

因为  $|t| = 2.647 > 1.681$ , 所以拒绝  $H_0$ , 新品种优于旧品种。-----1 分

北京邮电大学 2009—2010 学年第一 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、 填空题 (每空 4 分, 共 60 分):

1. 设 A、B、C 为三个事件, 则它们当中至少有一个发生这个事件, 用 A、B、C 的运算关系表示为\_\_\_\_\_;

2. 已知事件 A, B 有概率  $P(A) = 0.4$ ,  $P(B) = 0.5$ , 条件概率  $P(\bar{B} | A) = 0.3$ , 则  $P(A \cup B) =$ \_\_\_\_\_;

3. 设随机变量 X 的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.3, & -1 \leq x < 1 \\ 0.9, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ , 则

$P\{X = 1\} =$ \_\_\_\_\_;

4. 设随机变量 X 的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 则

$P\{X > \sqrt{E(X^2)}\} =$ \_\_\_\_\_;

5. 设随机变量 X 服从参数为  $\lambda$  的泊松分布且  $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$ , 则

$D(X) =$ \_\_\_\_\_;

6. 设随机变量 X 与 Y 互相独立, 且  $D(X) = 2, D(Y) = 1$ , 则

$D(X - 3Y - 2) =$ \_\_\_\_\_;

7. 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 2xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 则

$Z = X - Y$  的分布函数为\_\_\_\_\_

8. 设随机变量  $Y \sim Ex(1)$ , 随机变量  $X_k = \begin{cases} 0, & \text{若 } Y \leq k \\ 1, & \text{若 } Y > k \end{cases} (k = 1, 2)$ , 则

$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} =$ \_\_\_\_\_;

9. 设随机变量  $(X, Y) \sim N(0, 1; 2^2, 3^2; 0)$ , 则概率

$P\{2X - Y \geq -1\} =$ \_\_\_\_\_;

10. 设 X 与 Y 的相关系数为 0.9,  $Z = X - 0.4$ , 则 Y 与 Z 的相关系数为\_\_\_\_\_;

11. 计算机进行加法计算时, 把每个加数取为最接近它的整数来计算。设所有的取数误差是相互独立的随机变量, 并且都在区间  $[-0.5, 0.5]$  上服从均匀分布, 现有 1200 个数相加, 利用中心极限定理计算, 误差总和的绝对值小于 10 的概率为\_\_\_\_\_;

12. 设  $\bar{X}$  为总体 X 之样本  $X_1, \dots, X_n$  的样本均值,  $D(X) = \sigma^2$ , 则

$E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) =$ \_\_\_\_\_;

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则

$(n-1)(X_1 - \mu)^2 / \sum_{i=2}^n (X_i - \mu)^2$  服从的分布为\_\_\_\_\_ (需写出自由度);

14. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 并且

$C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  是参数  $\sigma^2$  的无偏估计量, 则常数  $C =$ \_\_\_\_\_;

15. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma^2$  未知) 的一个样本, 则  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的单侧置信下限为\_\_\_\_\_。

二(8分)、设随机变量  $X$  和  $Y$  同分布,  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数  $k$ ;

(2) 事件  $A = \{X > a\}$  和  $B = \{Y > a\}$  独立, 且  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ , 求常数  $a$ 。

三(12分)、设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} A(3x^2 + xy) & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1)  $A$  的值; (2)  $f_{Y|X}(y|x)$ ; (3)  $P\{Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2}\}$ 。

四(10分)、设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases} \theta > -1$

为未知参数, 已知  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本。求

(1) 未知参数  $\theta$  的矩估计量; (2) 未知参数  $\theta$  的极大似然估计量; (3)  $E(X)$  的极大似然估计量。

五(10分)、为改建学校本部中央绿地, 经管学院有 5 位学生彼此独立地测量了中央绿地的面积, 得如下数据 (单位:  $km^2$ ) 1.23 1.22 1.20 1.26 1.23。设测量值服从正态分布, 试检验 ( $\alpha = 0.05$ )

- (1) 以前认为这块绿地的面积是  $\mu = 1.23 km^2$ , 是否有必要修改以前的结果?
- (2) 若要求这次测量的标准差不超过  $\sigma = 0.015$ , 能否认为这次测量的标准差显著偏大?

附 分布数值表

$$\Phi(0.4) = 0.6554, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.30) = 0.9032, \Phi(2.33) = 0.99$$

$$t_{0.025}(4) = 2.7764, t_{0.025}(5) = 2.5706, t_{0.05}(4) = 2.1318, t_{0.05}(5) = 2.0150$$

$$\chi_{0.025}^2(4) = 11.143, \chi_{0.975}^2(4) = 0.484, \chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \chi_{0.95}^2(4) = 0.711$$

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、 填空题 (每空 4 分，共 60 分)：

1. 设 A、B、C 为三个事件，则它们当中至少有一个发生这个事件，用 A、B、C 的运算关系表示为  $A \cup B \cup C$ ；

2. 已知事件 A，B 有概率  $P(A) = 0.4$ ， $P(B) = 0.5$ ，条件概率  $P(\bar{B} | A) = 0.3$ ，则

$$P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}; 0.62$$

3. 设随机变量 X 的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.3, & -1 \leq x < 1 \\ 0.9, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ ，则  $P\{X = 1\} = \underline{0.6}$ ；

4. 设随机变量 X 的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，则  $P\{X > \sqrt{E(X^2)}\} = \underline{\hspace{2cm}}; 1/2$

5. 设随机变量 X 服从参数为  $\lambda$  的泊松分布且  $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$ ，则  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}; 2$

6. 设随机变量 X 与 Y 互相独立，且  $D(X) = 2, D(Y) = 1$ ，则  $D(X - 3Y - 21) = \underline{\hspace{2cm}}; 11$

7. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{others} \end{cases}$ ，则  $Z = X - Y$  的分布函数

$$\text{为 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 2z - z^2, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

8. 设随机变量  $Y \sim \text{Ex}(1)$ ，随机变量  $X_k = \begin{cases} 0, & \text{若 } Y \leq k \\ 1, & \text{若 } Y > k \end{cases}$  ( $k = 1, 2$ )，则  $P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$1 - e^{-1} \underline{\hspace{2cm}};$$

9. 设随机变量  $(X, Y) \sim N(0, 1; 2^2, 3^2; 0)$ ，则概率  $P\{2X - Y \geq -1\} = \underline{0.5}$ ；

10. 设 X 与 Y 的相关系数为 0.9， $Z = X - 0.4$ ，则 Y 与 Z 的相关系数为  $\underline{\hspace{2cm}}; 0.9$

11. 计算机进行加法计算时，把每个加数取为最接近它的整数来计算。设所有的取数误差是相互独

立的随机变量，并且都在区间  $[-0.5, 0.5]$  上服从均匀分布，现有 1200 个数相加，利用中心极

限定理计算，误差总和的绝对值小于 10 的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}; 0.6826$

12. 设  $\bar{X}$  为总体 X 之样本  $X_1, \dots, X_n$  的样本均值， $D(X) = \sigma^2$ ，则  $E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \underline{\hspace{2cm}};$

$$(n-1)\sigma^2$$

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本，则  $(n-1)(X_1 - \mu)^2 / \sum_{i=2}^n (X_i - \mu)^2$  服从的

分布为  $\underline{\hspace{2cm}}$  (需写出自由度);  $F(1, n-1)$

14. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本，并且  $C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  是参数  $\sigma^2$  的无偏

估计量，则常数  $C = \underline{\hspace{2cm}}; 1/2(n-1)$

15. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma^2$  未知) 的一个样本，则  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的单

侧置信下限为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。  $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$

二(8 分)、设随机变 X 和 Y 同分布，X 的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求常数 k;

(2) 已知事件  $A = \{X > a\}$  和  $B = \{Y > a\}$  独立，且  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ，求常数 a。

$$\text{解 (1) } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 kx^2 dx = \frac{8}{3} k \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{8} \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) \frac{3}{4} = P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \quad (2 \text{ 分})$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_0^a \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{\alpha^3}{8},$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \left(\frac{\alpha^3}{8}\right)^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{4} \quad (3 \text{ 分})$$

三(12 分)、设 (X, Y) 的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} A(3x^2 + xy) & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

求: (1) A 的值; (2)  $f_{Y|X}(y|x)$ ; (3)  $P\{Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2}\}$ 。

$$\text{解: } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A \int_0^1 dx \int_0^2 (3x^2 + xy) dy = 1,$$



于是  $A = \frac{1}{3}$

(2) 先求  $X$  的边缘概率密度:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{3} \int_0^2 (3x^2 + xy) dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

当  $0 < x < 1$  时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{3}(3x^2 + xy)}{2x^2 + \frac{2}{3}x} = \frac{3x + y}{6x + 2} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

$$(3) \text{ 由于 } P\{X < \frac{1}{2}\} = \int_0^{1/2} f_X(x) dx = \int_0^{1/2} (2x^2 + \frac{2}{3}x) dx = \frac{1}{6}$$

$$P\{X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\} = \int_0^{1/2} dx \int_0^{1/2} \frac{1}{3} (3x^2 + xy) dy = \frac{5}{192}$$

于是

$$P\{Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2}\} = \frac{P\{X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\}}{P\{X < \frac{1}{2}\}} = \frac{5}{32} \quad (3 \text{ 分})$$

四(10 分). 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases} \quad \theta > -1$  为未知参数.

已知  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本.

求 (1) 未知参数  $\theta$  的矩估计量;

(2) 未知参数  $\theta$  的极大似然估计量;

(3)  $E(X)$  的极大似然估计量

$$\text{解: (1) } E(X) = \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1} dx = \bar{X}, \quad E(X) = \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}$$

$$\text{矩估计量 } \therefore \theta = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}} \therefore \hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}} \quad (3 \text{ 分})$$

(2)

$$L(X_1, \dots, X_n, \theta) = (\theta+1)^n (X_1 \cdots X_n)^\theta, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \ln(X_1 \cdots X_n) = 0$$

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\ln(X_1 \cdots X_n)} - 1$$

$$\text{为极大似然估计量 } \hat{\theta} = -1 - \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i} \quad (4 \text{ 分})$$

(3)  $E(X)$  的极大似然估计量

$$\hat{E}(X) = \frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i} \quad (3 \text{ 分})$$

五(10 分). 为改建学校本部中央绿地, 经管学院有 5 位学生彼此独立地测量了中央绿地的面积, 得如下数据(单位:  $\text{km}^2$ ) 1.23 1.22 1.20 1.26 1.23. 设测量值服从正态分布, 试检验 ( $\alpha = 0.05$ )

(1) 以前认为这块绿地的面积是  $\mu = 1.23 \text{ km}^2$ , 是否有必要修改以前的结果?

(2) 若要求这次测量的标准差不超过  $\sigma = 0.015$ , 能否认为这次测量的标准差显著偏大?

解: (1) 假设  $H_0: \mu = 1.23, H_1: \mu \neq 1.23$ . (1 分)

$$\text{当 } H_0 \text{ 为真, 检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad (2 \text{ 分})$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(4) = 2.7764, \quad \text{拒绝域 } W = (-\infty, -2.7764] \cup [2.7764, +\infty)$$

$$\bar{x} = 1.246, s^2 = 0.0288^2,$$

$$T_0 = 1.242 \notin W, \text{ 于是不能拒绝 } H_0, \text{ 即无需修改以前的结果.} \quad (2 \text{ 分})$$

(2) 假设  $H_0: \sigma^2 = 0.015^2; H_1: \sigma^2 > 0.015^2$ .

$$\text{当 } H_0 \text{ 为真, 检验统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \quad \text{拒绝域 } W = [9.488, +\infty).$$

$$\chi_0^2 = 14.86 \in W, \text{ 于是拒绝 } H_0, \text{ 认为这次测量的标准差显著偏大.} \quad (3 \text{ 分})$$

附 分布数值表

$$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.62) = 0.9474, \Phi(1.30) = 0.9032, \Phi(2.33) = 0.99$$

$$t_{0.025}(4) = 2.7764, t_{0.025}(5) = 2.5706, t_{0.05}(4) = 2.1318, t_{0.05}(5) = 2.0150$$

$$\chi_{0.025}^2(4) = 11.143, \chi_{0.975}^2(4) = 0.484, \chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \chi_{0.95}^2(4) = 0.711$$

# 《概率论与数理统计》考试试题 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上一律无效

## 一 是非题 (共 14 分，每题 2 分)

1. 设  $A, B$  为随机事件，则  $A$  与  $\overline{A \cup B}$  是互不相容的 (是)
2.  $\Phi(x)$  是标准正态随机变量的分布函数，则  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  (是)
3. 若随机变量  $X$  与  $Y$  不相关，则  $E(XY) \neq E(X)E(Y)$  (非)
4. 设  $0 < P(A) < 1$ ，则  $A$  与  $B$  相互独立的充要条件的是  $P(B|A) = P(B)$  (是)
5. 样本均值的平方  $\bar{X}^2$  不是总体期望平方  $\mu^2$  的无偏估计 (是)
6. 在给定的置信度  $1 - \alpha$  下，被估参数的置信区间一定惟一 (非)
7. 在参数的假设检验中，拒绝域的形式是根据备择假设  $H_1$  而确定的 (是)

## 二、填空题 (40 分，每题 4 分)

1. 设  $A, B, C, D$  为四个事件，则它们当中至少有一个发生这个事件，用  $A, B, C, D$  的运算关系表示为  $A \cup B \cup C \cup D$ ;
2. 设 10 件产品中有 4 件是不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为  $\frac{1}{5}$ ;
3. 设  $X \sim N(-1, 4)$ ，则  $P\{|X+1| > 1\} = 0.617$  ( $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(0.25) = 0.5987$ );
4. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ a, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ ，且  $E(X) = 1.8$ ，则  $a = 0.6$ ;
5. 设随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布且  $P\{X=1\} = P\{X=2\}$ ，则  $E(X) = 2$ ;
6. 设随机变量  $X$  服从  $(-2, 2)$  上的均匀分布，则随机变量  $Y = X^2$  的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/(4\sqrt{y}) & 0 < y < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

7. 设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$(X, Y)$	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P$	0.4	0.2	$a$	$b$

若  $E(XY) = 0.8$ ，则  $a, b$  分别为  $0.1; 0.3$

8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_6$  是取自总体  $X \sim N(0, 1)$  的样本， $Y = (\sum_{i=1}^3 X_i)^2 + (\sum_{i=4}^6 X_i)^2$

则  $\frac{Y}{3}$  服从  $\chi^2(2)$  分布。

9. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本， $\bar{X}$  为样本均值，则总体方差  $\sigma^2$  的估计量  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  是 (是，不是)  $\sigma^2$  的无偏估计量。

10. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\mu$  未知) 的一个样本，则  $\sigma^2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的单侧置信上限为  $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ 。

## 三、计算题与应用题

1. (6 分) 某厂卡车运送防“H1N1 流感”用品下乡，顶层装 10 个纸箱，其中 5 箱民用口罩、2 箱医用口罩、3 箱消毒棉花。到目的地时发现丢失 1 箱，不知丢失哪一箱。现从剩下 9 箱中任意打开 2 箱，结果都是民用口罩的概率。

解 设  $A$  表示任取 2 箱都是民用口罩， $B_k$  分别表示丢失的箱中是 ( $k=1, 2, 3$ ) 民用口罩，医用口罩，消毒棉花。

$$P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k)P(A|B_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_4^2}{C_9^2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{C_5^2}{C_9^2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{8}{9}$$

2. (10 分) 设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4-2x-y) & x > 0, y > 0, 2x+y < 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1)  $f_{Y|X}(y|x)$ ; (2)  $P\{Y \geq 2 | X = \frac{1}{2}\}$ ; (3)  $P\{Y \geq 2 | X \geq \frac{1}{2}\}$ 。

解: (1) 先求  $X$  的边缘概率密度。

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{4-2x} \frac{3}{16}(4-2x-y) dy = \frac{3}{8}(2-x)^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当  $0 < x < 2$  时，

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{4-2x-y}{2(2-x)^2} & 0 < y < 4-2x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

图 3-7

$$(2) \text{ 由于 } f_{Y|X}(y|X=\frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{2(3-y)}{9} & 0 < y < 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{于是 } P\{Y \geq 2 | X = \frac{1}{2}\} = \int_2^{+\infty} f_{Y|X}(y|X=\frac{1}{2})dy = \int_2^{\frac{3}{2}} (3-y)dy = \frac{1}{9} \quad (2 \text{ 分})$$

$$(3) \text{ 由于 } P\{X \geq \frac{1}{2}\} = \int_{1/2}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{1/2}^2 (\frac{3}{8}(2-x)^2)dx = \frac{27}{64}$$

$$P\{X \geq \frac{1}{2}, Y \geq 2\} = \int_{1/2}^0 dx \int_2^{4-2x} \frac{3}{16}(4-2x-y)dy = \frac{1}{64} \quad (2 \text{ 分})$$

于是

$$P\{Y \geq 2 | X \geq \frac{1}{2}\} = \frac{P\{X \geq \frac{1}{2}, Y \geq 2\}}{P\{X \geq \frac{1}{2}\}} = \frac{1}{27} \quad (2 \text{ 分})$$

3. (10 分) 设总体  $X$  的分布律为:

$$\begin{bmatrix} X & 1 & 2 & 3 \\ P & p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \end{bmatrix}$$

其中  $p$  ( $0 < p < 1$ ) 是未知参数. 已知取得了如下样本值: 1, 2, 3

求 (1)  $p$  的矩估计值; (2)  $p$  的极大似然估计值.

$$\text{解 (1) } \bar{X} = \sum_{i=1}^3 X_i = 6, \text{ 令 } E(X) = 3 - 2p = \bar{X}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{得 } p \text{ 的矩估计值为 } \hat{p} = (3 - \bar{X})/2 = 1/4 \quad (2 \text{ 分})$$

(2) 似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^3 P(X = x_i) = P(X=1)P(X=2)P(X=3)$$

$$= 2p^3(1-p)^2 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\ln L(p) = \ln 2 + 3 \ln p + 2 \ln(1-p)$$

$$\text{令 } [\ln L(p)]' = \frac{3}{p} - \frac{2}{1-p} = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Rightarrow p = 3/5$$

$$\text{所以 } p \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{p} = 3/5 \quad (2 \text{ 分})$$

4. (14 分) (1) 有一大批糖果, 现从中随机地抽取 16 袋, 称得重量的平均值  $\bar{x} = 503.75$  克, 样本方差  $S = 6.2022$ . 求总体均值  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间. (设糖果重量服从正态分布)

$$\text{解 } \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.025, n-1 = 6, t_{0.025}(16) = 2.120, \text{ 置信区间为 } \bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \quad (4 \text{ 分})$$

即

$$503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315, \text{ 即}$$

$$(500.4, 507.1). \quad (3 \text{ 分})$$

(2) 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布  $N(\mu, 0.048^2)$ . 某日抽取 5 个样品, 测得

其纤度为: 1.31, 1.55, 1.34, 1.40, 1.45.

问 这天的纤度的总体方差是否正常? 试用  $\alpha = 10\%$  作假设检验.

解 要检验的假设为  $H_0: \sigma^2 = 0.048^2, H_1: \sigma^2 \neq 0.048^2$

$$\text{检验用的统计量 } \chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1), \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{拒绝域为 } \chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(4) = 9.488 \text{ 或}$$

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(4) = 0.711 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\bar{x} = 1.41$$

$$\chi_0^2 = 0.0362/0.0023 = 15.739 > 9.488, \text{ 落在拒绝域内,}$$

故拒绝原假设  $H_0$ , 即认为该天的纤度的总体方差不正常. (1 分)

5. (6 分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从参数为 3 的泊松(Poisson)分布, 证明

$X+Y$  仍服从泊松分布, 参数为 6.

$$\text{证 由题设 } P(X=m) = \frac{3^m}{m!} e^{-3}, P(Y=n) = \frac{3^n}{n!} e^{-3}, n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1 \text{ 分})$$

$$P(X+Y=i) = \sum_{k=0}^i P(X=k, Y=i-k) = \sum_{k=0}^i P(X=k)P(Y=i-k) \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \sum_{k=0}^i \frac{3^k}{k!} e^{-3} \cdot \frac{3^{i-k}}{(i-k)!} e^{-3} = e^{-6} \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^i \frac{i!}{k!(i-k)!} 3^k \cdot 3^{i-k} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= e^{-6} \frac{1}{i!} (3+3)^i = \frac{6^i}{i!} e^{-6}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

所以  $X+Y$  仍服从泊松分布, 参数为 6. (1 分)

附表:

$$t_{0.025}(15) = 2.1315, t_{0.025}(16) = 2.120, t_{0.05}(15) = 1.753, t_{0.05}(16) = 1.746$$

$$\chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \chi_{0.95}^2(4) = 0.711, \chi_{0.05}^2(5) = 11.071, \chi_{0.95}^2(5) = 0.854$$

北京邮电大学 2009—2010 学年第一 学期

《概率论与数理统计》考试试题 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上一律无效  
一 是非题 (共 14 分，每题 2 分)

1. 设  $A, B$  为随机事件，则  $A$  与  $\overline{A \cup B}$  是互不相容的 ( )
2.  $\Phi(x)$  是标准正态随机变量的分布函数，则  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  ( )
3. 若随机变量  $X$  与  $Y$  不相关，则  $E(XY) = E(X)E(Y)$  ( )
4. 设  $0 < P(A) < 1$ ，则  $A$  与  $B$  相互独立的充要条件的是  $P(B|A) = P(B)$  ( )
5. 样本均值的平方  $\bar{X}^2$  不是总体期望平方  $\mu^2$  的无偏估计 ( )
6. 在给定的置信度  $1 - \alpha$  下，被估参数的置信区间一定唯一 ( )
7. 在参数的假设检验中，拒绝域的形式是根据备择假设  $H_1$  而确定的 ( )

二、填空题 (40 分，每题 4 分)

1. 设  $A, B, C, D$  为四个事件，则它们当中至少有一个发生这个事件，用  $A, B, C, D$  的运算关系表示为 \_\_\_\_\_；
2. 设 10 件产品中有 4 件是不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为 \_\_\_\_\_。
3. 设  $X \sim N(-1, 4)$ ，则  $P\{|X+1| > 1\} = \_\_\_\_\_\_$  ( $\Phi(0.5) = 0.6915$ ,

$\Phi(0.25) = 0.5987$ )；

4. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ a, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ ，且  $E(X) = 1.8$ ，则

$a = \_\_\_\_\_\_$ ；

5. 设随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布且  $P\{X=1\} = P\{X=2\}$ ，则

$E(X) = \_\_\_\_\_\_$ ；

6. 设随机变量  $X$  服从  $(-2, 2)$  上的均匀分布，则随机变量  $Y = X^2$  的概率密

度为  $f_Y(y) = \_\_\_\_\_\_$ 。

7. 设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$(X, Y)$	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P$	0.4	0.2	$a$	$b$

若  $E(XY) = 0.8$ ，则  $a, b$  分别为 \_\_\_\_\_。

8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_6$  是取自总体  $X \sim N(0, 1)$  的样本， $Y = (\sum_{i=1}^3 X_i)^2 + (\sum_{i=4}^6 X_i)^2$

则  $\frac{Y}{3}$  服从 \_\_\_\_\_ 分布。

9. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本， $\bar{X}$  为样本均值，则总体方差  $\sigma^2$

的估计量  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  \_\_\_\_\_ (是，不是)  $\sigma^2$  的无偏估计量。

10. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\mu$  未知) 的一个样本，则  $\sigma^2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的单侧置信上限为 \_\_\_\_\_。

三、计算题与应用题

1. (6 分) 某厂卡车运送防“H1N1 流感”用品下乡，顶层装 10 个纸箱，其中 5 箱民用口罩、2 箱医用口罩、3 箱消毒棉花。到目的地时发现丢失 1 箱，不知丢失哪一箱。现从剩下 9 箱中任意打开 2 箱，求结果都是民用口罩的概率。

2. (10 分) 设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4-2x-y) & x > 0, y > 0, 2x+y < 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)  $f_{Y|X}(y|x)$ ；(2)  $P\{Y \geq 2 | X = \frac{1}{2}\}$ ；(3)  $P\{Y \geq 2 | X \geq \frac{1}{2}\}$ 。

3. (10 分) 设总体  $X$  的分布律为：

$$\begin{bmatrix} X & 1 & 2 & 3 \\ P & p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \end{bmatrix}$$

其中  $p$  ( $0 < p < 1$ ) 是未知参数。已知取得了如下样本值：1, 2, 3

求 (1)  $p$  的矩估计值；(2)  $p$  的极大似然估计值。

4. (14 分) (1) 有一大批糖果, 现从中随机地抽取 16 袋, 称得重量的平均值  $\bar{x} = 503.75$  克, 样本方差  $S = 6.2022$ 。求总体均值  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间。  
(设糖果重量服从正态分布)

(2) 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布  $N(\mu, 0.048^2)$ 。某日抽取

5 个样品, 测得其纤度为: 1.31, 1.55, 1.34, 1.40, 1.45。

问 这天的纤度的总体方差是否正常? 试用  $\alpha = 0.1$  作假设检验。

5. (6 分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从参数为 3 的泊松(Poisson)分布,

证明  $X+Y$  仍服从泊松分布, 参数为 6。

附表:

$$t_{0.025}(15) = 2.1315, \quad t_{0.025}(16) = 2.120, \quad t_{0.05}(15) = 1.753, \quad t_{0.05}(16) = 1.746$$

$$\chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \quad \chi_{0.95}^2(4) = 0.711, \quad \chi_{0.05}^2(5) = 11.071, \quad \chi_{0.95}^2(5) = 1.145$$

北京邮电大学经济管理学院 2009—2010 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (B 卷)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 45 分)

1. 已知  $P(A) = 0.7, P(B) = 0.4, P(\overline{A}B) = 0.5$ , 则  $P(A|B) = \underline{0.5}$ .
2. 一批产品共 50 件, 其中有 3 件不合格, 从中逐件不放回的取 3 次产品, 则第二次取得是不合格产品的概率为  $\underline{\frac{3}{50}}$ .

3. 设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	-1	0	1	2
p	0.3	0.2	0.1	0.4

$F(x)$  为  $\xi$  的分布函数, 则  $F(0.5) = \underline{0.5}$ .

4. 设随机变量  $\xi$  服从参数为 3 的泊松分布, 则  $E(\xi^2) = \underline{12}$ .

5. 设随机变量  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} Cx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则常数  $C = \underline{3}$ .

6. 若随机变量  $\xi$  服从 (1, 6) 上的均匀分布, 则方程  $x^2 + \xi x + 1 = 0$  有实数根的概率为  $\underline{0.8}$ .

7. 已知  $D(\xi) = 1, D(\eta) = 3$ , 且  $\xi$  和  $\eta$  相互独立, 则  $D(2\xi - 3\eta) = \underline{31}$ .

8. 设总体  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	0	1
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自该总体的样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则  $E(\bar{X}) = \underline{\frac{3}{5}}$ .

9. 设随机变量  $X \sim N(0, 1), Y \sim N(2, 9)$ , 且  $X$  和  $Y$  相互独立, 则随机变量

$Z = 2X - Y + 1$  服从分布  $\underline{N(-1, 13)}$ .

10. 随机变量  $X \sim F(n, m)$ , 则  $\frac{1}{X} \sim \underline{F(m, n)}$ .

11. 设  $\xi \sim N(5, 16)$ , 已知标准正态分布函数值  $\Phi_0(0.25) = 0.5987$ , 则  $P(\xi > 6) = \underline{0.4013}$ .

12. 设  $\xi \sim B(n, p)$ , 且已知  $E(\xi) = 6, D(\xi) = 3.6$ , 则  $n, p$  分别为  $\underline{15, 0.4}$ .

13. 设总体  $\xi$  的期望为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $(X_1, X_2, X_3)$  为来自  $\xi$  的样本, 令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6}X_1 - X_2 + \frac{2}{3}X_3, \quad \hat{\mu}_3 = X_3$$

则  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  中是  $\mu$  的最有效无偏估计为  $\underline{\hat{\mu}_1}$ .

14. 总体未知参数  $\theta$  的极大似然估计  $\hat{\theta}$  就是似然函数的极大值点.

15. 若总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的一个随机样本,

则  $\mu$  的极大似然估计为  $\underline{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$ ,  $\sigma^2$  的矩估计为:  $\underline{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ .

二、(15 分)

设二元随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x - 2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 边缘概率密度; (2) 概率  $P\{Y > X^2\}$

$$\text{解: (1) } \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = \int_0^1 (x - 2y) dy = x - 1, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

同理可得

$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{2} - 2y \quad (0 \leq y \leq 1) \quad \text{----- (8分)}$$

$$(2) P\{Y > X^2\} = \iint_{D: y > x^2} \varphi(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x - 2y) dy$$

$$= \frac{29}{20} \quad \text{----- (7分)}$$

三、(15分)

设二元随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} Cx^2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $C$ ; (2) 边缘概率密度:  $P\{X + Y < 1\}$

$$\text{解: (1) } 1 = \iint_D \varphi(x, y) dx dy = C \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y dy = \frac{C}{6}$$

$$C=6.$$

----- (5分)

$$(1) \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = \int_0^1 6x^2y dy = 3x^3, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

同理可得

$$\varphi_Y(y) = 2y \quad (0 \leq y \leq 1) \quad \text{----- (5分)}$$

$$(2) P\{X+Y < 1\} = \iint_{D: x+y < 1} \varphi(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 6x^2y dy$$

$$= 6 \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{----- (5分)}$$

四、(10分)

某个工厂对铝的溶化点做了4次试验, 其结果如下(单位:  $^{\circ}\text{C}$ ):

1550, 1540, 1530, 1560

并设溶化点服从正态分布, 试在置信水平  $\alpha = 0.05$  下, 求溶化点期望值的置信区间(已知双侧临界点  $t_{0.025}(3) = 3.182$ )

$$\text{解: 经计算, 得 } \bar{x} = 1545, s^2 = 256 \quad \text{----- (4分)}$$

于是得置信上、下限分别为

$$\bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = 1545 + 3.182 \times \sqrt{\frac{256}{4}} = 1570.46 \quad \text{----- (3分)}$$

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = 1545 - 3.182 \times \sqrt{\frac{256}{4}} = 1519.54 \quad \text{----- (3分)}$$

从而得溶点期望的置信区间  $[1519.54, 1570.46]$ .

五、(15分)

设总体  $X$  的概率密度为  $\varphi(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha+2)x^{\alpha+1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$

的样本, 试求 (1)  $\alpha$  的最大似然估计, (2)  $\alpha$  的矩估计.

解: (1) 似然函数为

$$L(\alpha) = (\alpha+2)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha+1} \quad \text{----- (3分)}$$

$$\ln L(\alpha) = n \ln(\alpha+2) + (\alpha+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha+2} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad \text{----- (2分)}$$

解得  $\alpha$  的最大似然估计

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 2 \quad \text{----- (3 分)}$$

$$(2) \int_0^1 x(\alpha+2)x^{\alpha+1}dx = \frac{\alpha+2}{\alpha+3}, \quad \text{----- (2 分)}$$

$$\text{令 } \frac{\alpha+2}{\alpha+3} = \bar{X}, \quad \text{----- (3 分)}$$

$$\text{解得 } \alpha \text{ 的矩估计为 } \alpha = \frac{3\bar{X}-2}{1-\bar{X}}. \quad \text{----- (2 分)}$$



北京邮电大学 2009—2010 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期末考试答案 (B)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上无效。

一. 填空题 (45 分, 每空 3 分)

1. 设两两独立的事件  $A, B, C$  满足  $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$ , 且

$$P(A \cup B \cup C) = 9/16, \text{ 则 } P(A) = \underline{1/4}$$

2. 袋中有 5 个球, 其中 1 个红球, 每次从中任取 1 个球, 取出后不放回, 问前 3 次取到红球的概率为  $\underline{3/5}$ .

3. 设平面区域  $D$  由  $x=1, y=0, y=x$  围成, 平面区域  $D_1$  由  $y=x^2, y=x$  围成. 现向

$D$  内依次随机投掷质点, 问第 3 次投掷的质点恰好第二次落在  $D_1$  内的概率是

$$\underline{4/27}.$$

4. 设随机变量  $X$  的概率分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{问 } B = \underline{-1}$$

5. 随机变量  $k$  在  $(-5, 5)$  上服从均匀分布, 即  $k \sim U(-5, 5)$ , 则方程

$$4x^2 + 4kx + k + 2 = 0 \text{ 有实根的概率为 } \underline{7/10}$$

6. 设随机变量序列  $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$  独立同分布于  $(-3, 3)$  上的均匀分布, 即  $U(-3, 3)$ ,

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i < 0\right\} = \underline{1/2}.$$

7. 已知随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 定义函数  $g(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ , 求  $Y = g(X)$  的密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi}, & y \in (0, \sqrt{2\pi}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

8. 设随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  的均匀分布, 求

$$D(X+Y) = \underline{1/6}.$$

9. 设  $X \sim N(3, 4)$  满足  $P\{X > C\} = P\{X \leq C\}$ , 则  $C = \underline{3}$ .

10. 设随机变量  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	-2	0	3	5
P	0.1	0.1	0.4	0.4

$$F(x) \text{ 为 } \xi \text{ 的分布函数, 则 } F(4) = \underline{0.6}$$

11. 设随机变量  $X \sim t(n)$ , 则  $X^2 \sim \underline{F(1, n)}$

12. 设总体  $\xi$  的期望为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$  的样本, 令

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6} X_2 + \frac{2}{7} X_3, \quad \hat{\mu}_3 = X_3.$$

则  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  中是  $\mu$  的最有效无偏估计为  $\underline{\hat{\mu}_1}$

13. 若总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的一个随机样本,

$$\text{则 } \mu \text{ 的矩估计为 } \underline{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}, \quad \sigma^2 \text{ 的极大似然估计为: } \underline{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

14. 设随机变量  $X$  服从参数为  $p(0 < p < 1)$  的 0-1 分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的样

$$\text{本, 则 } E(S^2) = \underline{\sigma^2}.$$

15. 设总体  $X$  的方差为 1, 来自  $X$  的容量为 100 的简单随机样本测得均值为 5, 则  $X$  的期望的置信系数等于 0.95 的置信区间为  $\underline{[4.8, 5.2]}$ .

$$(Z_{0.025} = 1.96)$$

## 二. (15 分)

设 A, B 为两个随机事件, 且  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生}, \\ 0, & A \text{ 不发生}, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生}, \\ 0, & B \text{ 不发生}. \end{cases}$$

求(1) 二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律,

(2)  $X, Y$  的相关系数,

(3)  $Z = X^2 + Y^2$  的分布律.

解. (i)  $P(AB) = P(A)P(B|A) = 1/12$ ,  $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = 1/6$ ,

$$\begin{cases} P(X=1, Y=1) = P(AB) = 1/12, \\ P(X=1, Y=0) = P(\overline{A}B) = 1/6, \\ P(X=0, Y=1) = P(A\overline{B}) = 1/12, \\ P(X=0, Y=0) = P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 2/3, \end{cases} \quad \text{----- (5 分)}$$

$$(2) E(X) = P(A) = 1/4, E(Y) = P(B) = 1/6, E(XY) = 1/12$$

$$\text{所以, } \begin{cases} \text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = 1/24, \\ EX^2 = P(A) = 1/4, EY^2 = P(B) = 1/6, \\ DX = EX^2 - (EX)^2 = 3/16, \\ DY = EY^2 - (EY)^2 = 5/36, \end{cases}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DXDY}} = 1/\sqrt{15} \quad \text{----- (5 分)}$$

(3)  $Z = X^2 + Y^2$  的取值为 0, 1, 2.

$$\begin{cases} P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = 2/3, \\ P(Z=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) = 1/4, \\ P(Z=2) = P(X=1, Y=1) = 1/12 \end{cases} \quad \text{----- (5 分)}$$

## 三. (15 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$ , (2) 求条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$ , (3) 求条件

概率  $P(X \leq 1|Y \leq 1)$ .

解. (1)

$$f_X(x) = \int_0^x f(x, y) dy = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_y^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad \text{----- (5 分)}$$

(2)

$$\text{当 } x > 0, f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 1/x, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 当 } x \leq 0, \text{ 不存在.}$$

$$\text{当 } y > 0, f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} e^{y-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 当 } y \leq 0, \text{ 不存在.} \quad \text{----- (5 分)}$$

$$(3) P(Y \leq 1) = 1 - e^{-1}, P(X \leq 1, Y \leq 1) = 1 - 2e^{-1},$$

$$\text{所以 } P(X \leq 1|Y \leq 1) = \frac{P(X \leq 1, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{e-2}{e-1} \quad \text{----- (5 分)}$$

## 四. (15 分)

设总体  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha-5)x^{\alpha-6}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自  $\xi$  的

样本, 试求 (1)  $\alpha$  的最大似然估计, (2)  $\alpha$  的矩估计。

解: (1) 似然函数为

$$L(\alpha) = (\alpha-5)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-6} \quad \text{----- (3 分)}$$

$$\ln L(\alpha) = n \ln(\alpha-5) + (\alpha-6) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha-5} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad \text{----- (2 分)}$$

解得  $\alpha$  的最大似然估计

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 5 \quad \text{----- (3 分)}$$

$$(2) \int_0^1 x (\alpha-5) x^{\alpha-6} dx = \frac{\alpha-5}{\alpha-4} \quad \text{----- (2 分)}$$

$$\text{令 } \frac{\alpha-5}{\alpha-4} = \bar{X} \quad \text{----- (3 分)}$$

$$\text{解得 } \alpha \text{ 的矩估计为 } \alpha = \frac{5-4\bar{X}}{1-\bar{X}} \quad \text{----- (2 分)}$$

## 五、(10 分)

新旧两个水稻品种进行对比试验, 假定产量都服从正态分布, 旧品系共分成 25 个小区, 平均产量  $\bar{x}_1 = 35.65$  公斤, 样本的标准差  $s_1 = 2.32$  公斤; 新品系共分成 20 个小区, 平均产量  $\bar{x}_2 = 37.35$  公斤, 样本的标准差为  $s_2 = 1.89$  公斤; 问新品系是否优于旧品系? (假定新旧品系方差相等) ( $\alpha = 0.05, t_{43}(0.05) = 1.681$ )。

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 < \mu_2 \quad \text{----- 3 分}$$

$$\text{用 } t \text{ 检验法, } H_0 \text{ 成立时统计量为: } T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \quad \text{----- 3 分}$$

代入样本值计算得

$$S_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)} = \frac{24 \times 2.32^2 + 19 \times 1.89^2}{43} = 4.583$$

$$S_w = 2.141, \quad \text{----- 3 分}$$

$$\text{因此得到 } t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{35.65 - 37.35}{2.141 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}}} = -2.647,$$

因为  $|t| = 2.647 > 1.681$ , 所以拒绝  $H_0$ , 新品种优于旧品种。-----1 分

北京邮电大学 2008—2009 学年第一 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、 填空题 (每小题 4 分, 共 60 分):

1. 设  $P(A) = 0.5, P(\overline{A}B) = 0.4$ , 则  $P(B|A) = 0.2$ ;
2. 在三次射击中至少命中一次的概率为 0.875, 则在一次射击中命中靶子的概率 0.5 ;

3. 设随机变量  $X$  的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.4, & -1 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ , 则  $X$  的分布律为 \_\_\_\_\_;

$X$	-1	1	3
$P$	0.4	0.4	0.2

4. 设  $X \sim N[0,1]$ , 则随机变量  $Y = e^X$  的概率密度函数当  $y > 0$  时为  $f_Y(y) =$

$$\frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

5. 设  $X \sim U[-3,2]$ ,  $Y = \begin{cases} -1, & X < 0 \\ 1, & X \geq 0 \end{cases}$ , 则  $EY = -1/5$ ;

6. 如果随机变量  $X, Y$  的相关系数为  $\rho_{XY}$ , 且  $\xi = aX + b, \eta = cY + d$ , 其中  $a, c$  同号, 则  $\xi, \eta$  的相关系数为 \_\_\_\_\_;  $\rho_{XY}$

7. 设 10 个电子管的寿命  $X (i=1 \sim 10)$  独立同分布, 且  $D(X_i) = A (i=1 \sim 10)$ , 则 10 个电子管的平均寿命  $Y$  的方差  $D(Y) =$  \_\_\_\_\_ 0.1A

8. 已知某公司组装产品的次品率为 0.04, 现对该公司组装的 100 台产品逐个独立测试, 利用中心极限定理计算, 测试结果不少于 4 台次品的概率为 \_\_\_\_\_; 0.5

9. 设  $\bar{X}$  为总体  $X \sim N(3, 4)$  抽取的样本  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  的均值, 则  $P(\bar{X} < 5) =$  \_\_\_\_\_; 0.9772

10. 设  $X \sim t(m)$ , 则随机变量  $Y = X^2$  服从的分布为  $F(1, m)$  \_\_\_\_\_ (需写出自由度)

11. 设  $X$  的分布律为

$P$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$
-----	------------	---------------------	----------------

已知一个样本值  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$ , 则参数的极大似然估计值为 \_\_\_\_\_; 5/6

12. 设  $X_1, X_2, \dots, X_6$  是取自总体  $X \sim N(0, 1)$  的样本,  $Y = (\sum_{i=1}^3 X_i)^2 + (\sum_{i=4}^6 X_i)^2$ ,

则当  $c =$  \_\_\_\_\_ 时,  $cY$  服从  $\chi^2$  分布,  $E(\chi^2) =$  \_\_\_\_\_; 1/3; 2

13. 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^\alpha, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\alpha > -1$  是未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自  $X$  的样本, 则  $\alpha$  的矩估计量

为 \_\_\_\_\_;  $\hat{\alpha} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$

14. 样本容量为  $n$  时, 样本方差  $S^2$  是总体方差  $\sigma^2$  的无偏估计量, 这是因为 \_\_\_\_\_

$$ES^2 = \sigma^2$$

二(6 分)、设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$(X, Y)$	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P$	0.4	0.2	$a$	$b$

若  $E(XY) = 0.8$ , 求(1)常数  $a, b$ , (2)  $X, Y$  的协方差  $\text{cov}(X, Y)$ .

解 (1) 由  $E(XY) = 0.8, 1 \times 0.2 + 2 \times b = 0.8, b = 0.3$ ; (2 分)

又  $a + b = 0.4, a = 0.1$  (2 分)

(2)  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.1$  (2 分)

三(12 分)、设  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c(4-2x-y) & x > 0, y > 0, 2x+y < 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $c$ ; (2)  $f_{Y|X}(y|x)$ ; (3)  $P\{Y \geq 2 | X = \frac{1}{2}\}$ .

解 (1)  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} c(4-2x-y) dy$  (2 分)

(2) 先求  $X$  的边缘概率密度

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \\ &= \begin{cases} \int_0^{4-2x} \frac{3}{16} (4-2x-y) dy = \frac{3}{8} (2-x)^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

当  $0 < x < 2$  时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{4-2x-y}{2(2-x)^2} & 0 < y < 4-2x \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$(3) \quad f_{Y|X}(y|x = \frac{1}{2}) = f_{Y|X}(y|x) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{2(3-y)}{9} & 0 < y < 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} P\{Y \geq 2 | X = \frac{1}{2}\} &= \int_2^{+\infty} f_{Y|X}(y|x = \frac{1}{2}) dy \\ &= \int_2^3 \frac{2}{9} (3-y) dy = \frac{1}{9}. \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

四(10 分). 随机地从一批零件中抽取 16 个, 测得长度平均值为  $\bar{x} = 2.125 \text{ cm}$ ,  $s = 0.0170$ . 设零件长度分布为正态分布, 试求总体均值  $\mu$  的 90% 的置信区间: (1) 若  $\sigma = 0.01 \text{ cm}$ , (2) 若  $\sigma$  未知.

( $u_{0.05} = 1.645$ ,  $t_{0.05}(15) = 1.7531$ )

解 (1)  $\sigma$  已知.

$$\text{置信区间为 } \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$u_{\alpha/2} = u_{0.05} = 1.645, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} = 0.004. \quad (2 \text{ 分})$$

于是置信区间为  $(2.121, 2.129)$ . (1 分)

(2) 若  $\sigma$  未知.

$$\text{置信区间为 } (\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)) \quad (2 \text{ 分})$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.05}(15) = 1.7531, S^2 = \frac{0.0044}{15}, \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) = 0.0075. \quad (2 \text{ 分})$$

于是置信区间为  $(2.1175, 2.1325)$ . (1 分)

五(12 分). 从某锌矿的东西两支矿脉中, 各取容量为 9 和 8 的样本分析后, 计算其样本含锌量的平

均值与方差分别为: 东支:  $\bar{x} = 0.230, S_1^2 = 0.1337, n_1 = 9$ ;

西支:  $\bar{y} = 0.269, S_2^2 = 0.1736, n_2 = 8$ ;

假定东西两支矿脉的含锌量分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 对  $\alpha = 0.05$ , 问能否认为

两支矿脉的含锌量相同, 即检验 (1)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ; (2)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ .

$$(F_{0.025}(8,7) = 4.90, F_{0.975}(8,7) = \frac{1}{F_{0.025}(7,8)} = \frac{1}{4.53}, t_{0.025}(15) = 2.1315, )$$

解 设东支矿脉的含锌量为  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , 西支矿脉的含锌量为  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,

(1) 首先需检验假设:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ .

$$\text{取统计量 } F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(8,7), \quad (2 \text{ 分})$$

否定域为  $W: F \leq F_{1-\alpha/2}(8,7)$  或  $F \geq F_{\alpha/2}(8,7)$ . (2 分)

$$F_{0.025}(8,7) = 4.90, F_{0.975}(8,7) = \frac{1}{F_{0.025}(7,8)} = \frac{1}{4.53}$$

$$\text{计算得 } F = \frac{0.1337}{0.1736} = 0.7702$$

因为  $\frac{1}{4.53} < F < 4.90$ , 故接受假设  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . (2 分)

(2) 检验假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ .

$$\text{检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2} \left( \frac{1}{n_1} S_1^2 + \frac{1}{n_2} S_2^2 \right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad (2 \text{ 分})$$

拒绝域为  $|T| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$  (2 分)

计算得

$$t = \frac{0.230 - 0.269}{\sqrt{8 \times 1.337 + 7 \times 0.1736}} \sqrt{\frac{9 \times 8 \times 15}{17}} = -0.2180$$

$$t_{0.025}(15) = 2.1315,$$

$$|t| < 2.1315$$

故接受假设, 即认为两支矿脉的含锌量相同. (2 分)

北京邮电大学 2006—2007 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A 卷)

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 60 分，每小题 4 分)

1. 已知  $P(A)=0.5$ ,  $P(B)=0.4$ ,  $P(A \cup B)=0.6$ , 则  $P(A|B)=$ \_\_\_\_\_。
2. 已知在 10 只产品中两只是次品，在其中取两次，每次取一只，作不放回抽样，则第二次取出的是次品的概率为\_\_\_\_\_。
3. 设随机变量  $X$  的分布律为：

0	1	2	3	4	5	6
0.1	0.15	0.2	0.3	0.12	0.1	0.03

则  $P(X \leq 4) =$ \_\_\_\_\_,  $P(2 \leq X \leq 5) =$ \_\_\_\_\_。

4. 设  $X$  的分布函数为  $F(x)$ ,  $F(-2)=0$ ,  $F(2)=0.3$ , 则  $P(-3 < X \leq 2) =$ \_\_\_\_\_。
5. 设随机变量  $(X, Y)$  的分布函数为  $F(x, y)$ , 分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
-1	0.2	0	0.1
0	0	0.4	0
1	0.1	0	0.2

则  $F(0,1) =$ \_\_\_\_\_。

6. 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

则  $P(Y \leq X) =$ \_\_\_\_\_。

7. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 则  $X+Y$  服从\_\_\_\_\_分布。

8. 设  $E(X)=2$ ,  $E(Y)=1$ ,  $D(X)=1$ ,  $D(Y)=1$ , 则  $E(2X-Y-3) =$ \_\_\_\_\_, 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $D(2X-Y-3) =$ \_\_\_\_\_。

9. 若  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $\text{cov}(X, Y) =$ \_\_\_\_\_。

10. 设随机变量  $E(X)=m+1$ ,  $D(X)=m+1$ , 则由切比雪夫不等式

$$P\{|X-(m+1)| < m+1\} \geq \text{_____}。$$

11. 设  $X_1, X_2, \dots$  为相互独立的随机变量序列, 且  $X_i (i=1, 2, \dots)$  服从  $E(X) = \frac{1}{2}$  的指数分布,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}} \leq x \right\} = \text{_____} \quad (\text{可正态分布的分布函数表示})。$$

12. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $S^2$  为样本方差,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \text{_____}。$$

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的一个样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $D(X) = \sigma^2$ , 则

$$c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ 是 } \sigma^2 \text{ 的无偏估计, 则 } c = \text{_____}。$$

14. 设随机地取某种炮弹 9 发做实验, 得炮口速度的样本标准差  $S=11$  (m/s), 已知炮口速度服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则这种炮弹的炮口速度的方差  $\sigma^2$  的置信度为 95% 的置信区间

$$\text{为: } \text{_____}。 \left( \frac{1}{\chi^2_{0.025}(8)} = 0.058, \frac{1}{\chi^2_{0.975}(8)} = 0.459 \right)$$

15. 设总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 从两总体中分别抽取样本, 得数据如下:

$$n_1 = 8, \quad \bar{x} = 10.5, \quad s_1^2 = 42.25;$$

$$n_2 = 10, \quad \bar{x} = 13.4, \quad s_1^2 = 56.25$$

$$\text{则 } P\left\{ \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} < 3.19 \right\} = \text{_____}。 (F_{0.05}(7,9) = 3.29, F_{0.025}(9,7) = 4.82)$$

二、(8分) 设连续型随机变量  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

且  $E(X) = \frac{1}{3}$ , 求 (1)  $a, b$  的值; (2)  $Y = 2X - 1$  的概率密度。

三、(12分) 设离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0.10	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0

求 (1) 随机变量  $X, Y$  的边缘分布律; (2) 判断  $X, Y$  是否相互独立并说明理由;

(3) 在  $X = 2$  条件下, 求  $Y$  的条件分布律; (4)  $\text{cov}(X, Y)$ 。

四、(10分) 设总体  $X$  的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\theta (\theta > -1)$  是未知参数.  $X_1, X_2, \dots, X_5$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,

求 (1)  $\theta$  的矩估计量; (2)  $\theta$  的极大似然估计量。

五、(10分) 对一批锰的熔点做 5 次测定, 结果为 1269, 1267, 1271, 1263 和 1265 $^{\circ}\text{C}$ 。若

锰的熔点服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  和  $\sigma^2$  为未知常数。对给定的检验水平

$\alpha = 0.05$ , 做假设检验:

(1).  $H_0: \mu = 1266, H_1: \mu \neq 1266$ ;

(2).  $H_0: \sigma^2 \leq 4, H_1: \sigma^2 > 4$ 。

附. 标准正态分布上 5%分位点为 1.645, 上 2.5%分位点为 1.96;

$$t_{0.05}(4) = 2.1318, \quad t_{0.025}(4) = 2.7764, \quad t_{0.05}(5) = 2.0150, \quad t_{0.025}(5) = 2.5706,$$

$$\chi_{0.025}^2(4) = 11.143, \quad \chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \quad \chi_{0.95}^2(4) = 0.711, \quad \chi_{0.975}^2(4) = 0.484,$$

$$\chi_{0.025}^2(5) = 12.833, \quad \chi_{0.05}^2(5) = 11.071, \quad \chi_{0.95}^2(5) = 1.145, \quad \chi_{0.975}^2(5) = 0.831.$$

北京邮电大学 2005-2006 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A 卷) 参考答案及评分标准

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 60 分，每小题 4 分)

1. 已知  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.4$ ,  $P(A \cup B) = 0.6$ , 则  $P(A|B) = 0.75$ 。

2. 已知在 10 只产品中两只是次品，在其中取两次，每次取一只，作不放回抽样，则第二次取出的是次品的概率为  $1/5$ 。

3. 设随机变量  $X$  的分布律为：

$X$	0	1	2	3	4	5	6
$P$	0.1	0.15	0.2	0.3	0.12	0.1	0.03

则  $P(X \leq 4) = 0.87$ ,  $P(2 \leq X \leq 5) = 0.72$ 。

4. 设  $X$  的分布函数为  $F(x)$ ,  $F(-2) = 0$ ,  $F(2) = 0.3$ , 则  $P(-3 < X \leq 2) = 0.3$ 。

5. 设随机变量  $(X, Y)$  的分布函数为  $F(x, y)$ , 分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
-1	0.2	0	0.1
0	0	0.4	0
1	0.1	0	0.2

则  $F(0, 1) = 0.2$ 。

6. 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,

则  $P(Y \leq X) = 1/3$ 。

7. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 则  $X+Y$  服从

$N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  分布 (写清参数)。

8. 设  $E(X) = 2$ ,  $E(Y) = 1$ ,  $D(X) = 1$ ,  $D(Y) = 1$ , 则  $E(2X - Y - 3) = 0$ , 若  $X$  与  $Y$

相互独立, 则  $D(2X - Y - 3) = 5$ 。

9. 若  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $\text{cov}(X, Y) = 0$ 。

10. 设随机变量  $E(X) = m+1$ ,  $D(X) = m+1$ , 则由切比雪夫不等式

$$P\{|X - (m+1)| < m+1\} \geq \frac{m}{m+1}.$$

11. 设  $X_1, X_2, \dots$  为相互独立的随机变量序列, 且  $X_i (i=1, 2, \dots)$  服从  $E(X) = \frac{1}{2}$  的指数分布,

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}} \leq x\right\} = \Phi(x) \quad (\text{可用标准正态分布的分布函数 } \Phi(x) \text{ 表示}).$$

12. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $S^2$  为样本方差,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的一个样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $D(X) = \sigma^2$ , 若

$$c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ 是总体方差 } \sigma^2 \text{ 的无偏估计, 则 } c = 1/n-1.$$

14. 设随机地取某种炮弹 9 发做实验, 得炮口速度的样本标准差  $S=11$  (m/s), 已知炮口速度服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则这种炮弹的炮口速度的方差  $\sigma^2$  的置信度为 95% 的置信区间为:

$$(56.144, 444.312). \quad \left(\frac{1}{\chi_{0.025}^2(8)} = 0.058, \frac{1}{\chi_{0.975}^2(8)} = 0.459\right)$$

15. 设总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 从两总体中分别抽取样本, 得数据如下:

$$n_1 = 8, \quad \bar{x} = 10.5, \quad s_1^2 = 42.25;$$

$$n_2 = 10, \quad \bar{y} = 13.4, \quad s_2^2 = 56.25$$

$$\text{则 } P\left\{\frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} < 3.19\right\} = 0.95. \quad (F_{0.05}(7, 9) = 3.29, F_{0.025}(9, 7) = 4.82)$$



二、(8分) 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

且  $E(X) = \frac{1}{3}$ , 求 (1)  $a, b$  的值; (2)  $Y = 2X - 1$  的概率密度。

解 (1) 由已知得  $\frac{a}{2} + b = 1, \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$ , (2分)

解之  $a = -2, b = 2$  (2分)

(2)  $x = h(y) = \frac{y+1}{2}, h'(y) = \frac{1}{2}$ , 所以 (2分)

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}[-2(\frac{y+1}{2}) + 2], & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1-y}{2}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2分)$$

三、(12分) 设离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0.10	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0

求 (1) 随机变量  $X, Y$  的边缘分布律; (2) 判断  $X, Y$  是否相互独立并说明理由;

(3) 在  $X = 2$  条件下, 求  $Y$  的条件分布律; (4)  $\text{cov}(X, Y)$ 。

解 (1)

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$p_{i.}$
1	0.10	0	0.1	0	0.2
2	0.3	0	0.1	0.2	0.6
3	0	0.2	0	0	0.2
$p_{.j}$	0.4	0.2	0.2	0.2	1

(4分)

(2)  $X, Y$  不相互独立; (2分)

$$(3) \begin{bmatrix} p_{2j}/p_{2.} & 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3分)$$

$$(4) E(X) = 2, E(Y) = 2.2, E(XY) = 4.4, \text{cov}(X, Y) = 0. \quad (3分)$$

四、(10分) 设总体  $X$  的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\theta (\theta > -1)$  是未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_5$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,

求 (1)  $\theta$  的矩估计量; (2)  $\theta$  的极大似然估计量。

$$\text{解 (1)} \quad \mu = E(X) = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1} dx = \frac{\theta+1}{\theta+2} \quad (2分)$$

$$\text{令 } \mu = \bar{X}, \quad (2分)$$

$$\text{所以 } \theta \text{ 的矩估计量 } \hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}; \quad (1分)$$

(2) 设  $x_1, x_2, \dots, x_5$  是相应于样本  $X_1, X_2, \dots, X_5$  的一个样本值, 则

似然函数为

$$L(\theta) = (\theta+1)^5 \left( \prod_{i=1}^5 x_i \right)^\theta, \quad 0 < x_i < 1, i=1, 2, \dots, 5 \quad (1分)$$

$$\ln L(\theta) = 5 \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^5 \ln x_i \quad (1分)$$

$$\text{令 } [\ln L(\theta)]' = \frac{5}{\theta+1} + \sum_{i=1}^5 \ln x_i = 0, \quad (1分)$$

$$\text{所以 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{5}{\sum_{i=1}^5 \ln x_i} \quad (1分)$$

$$\text{故 } \theta \text{ 的极大似然量为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{5}{\sum_{i=1}^5 \ln X_i} \quad (1分)$$

五、(10 分) 对一批铎的熔点做 5 次测定，结果为 1269, 1267, 1271, 1263 和 1265°C。若

铎的熔点服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中  $\mu$  和  $\sigma^2$  为未知常数。对给定的检验水平

$\alpha = 0.05$ ，做假设检验：

$$(1). H_0: \mu = 1266, H_1: \mu \neq 1266;$$

$$(2). H_0: \sigma^2 \leq 4, H_1: \sigma^2 > 4.$$

附：标准正态分布上 5%分位点为 1.645，上 2.5%分位点为 1.96；

$$t_{0.05}(4) = 2.1318, t_{0.025}(4) = 2.7764, t_{0.05}(5) = 2.0150, t_{0.025}(5) = 2.5706,$$

$$\chi_{0.025}^2(4) = 11.143, \chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \chi_{0.95}^2(4) = 0.711, \chi_{0.975}^2(4) = 0.484,$$

$$\chi_{0.025}^2(5) = 12.833, \chi_{0.05}^2(5) = 11.071, \chi_{0.95}^2(5) = 1.145, \chi_{0.975}^2(5) = 0.831.$$

解：由  $n = 5$ ， $\alpha = 0.05$ ， $x_1 = 1269$ ， $x_2 = 1267$ ， $x_3 = 1271$ ， $x_4 = 1263$ ， $x_5 = 1265$ ，得

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = 1267, s^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10, s = \sqrt{10}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$(1). \text{因 } 1.0 = |\bar{x} - 1266| < (s/\sqrt{n}) \cdot t_{n-1}(\alpha/2) = \sqrt{2} \times 2.7764 = 3.9263, \quad (3 \text{ 分})$$

(拒绝域 2 分，样本值 1 分)

故，接受  $H_0$  为真，即接受“总体均值  $\mu = 1267$ ”的假设。 (1 分)

$$(2). \text{因 } 10 = (n-1)s^2 / \sigma_0^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha) = 9.488, \quad (3 \text{ 分})$$

(拒绝域 2 分，样本值 1 分)

故，拒绝接受  $H_0$  为真，即接受“总体方差  $\sigma^2 > 4$ ”。 (1 分)

北京邮电大学 2006—2007 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B 卷) 标准答案

一、填空题 (每题 4 分, 共 60 分):

1. 一种零件由三道相互独立的工序加工完成, 一个零件若在任何一道工序出废品则该零件即为废品。设  $A_i$  表示“某零件在第  $i$  道工序出废品” ( $i=1, 2, 3$ ), 则一零件是废品可用  $A_i$  表示为  $\bigcup_{i=1}^3 A_i$ ;

2. 10 件产品中有 3 件次品, 从中随机抽取 2 件, 则至少抽到 1 件次品的概率是  $8/15$ , 两件都是次品的概率是  $1/15$ ;

3. 某射手有 5 发子弹, 连续向某目标射击, 直到命中或子弹用完为止。若该射手每次射击命中的概率为 0.8, 则用完子弹且击中目标的概率为  $0.2^5 \times 0.8$ , 在用完子弹的条件下, 击中目标的概率为 0.8;

4. 设离散型随机变量  $X$  的概率分布为:  $P\{X=-1\}=0.2$ ,  $P\{X=1\}=0.5$ ,

$$P\{X=3\}=0.3, \text{ 则 } X \text{ 的分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.2, & -1 \leq x < 1, \\ 0.7, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3 \end{cases} \quad P\{X \leq 2\} = 0.7;$$

5. 设  $F_1(x)$  与  $F_2(x)$  分别为任意两个随机变量的分布函数, 则要使  $F(x) = aF_1(x) + bF_2(x)$  为某随机变量的分布函数, 必有  $a+b=1$ ;

6. 设  $X \sim N(2, 4)$ , 且  $aX+b \sim N(0, 1)$ , 则  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -1$ ;

7. 设  $X \sim U[-2, 1]$ ,  $Y = \begin{cases} -1, & X < 0, \\ 1, & X \geq 0, \end{cases}$  则  $EY = -1/3$ ;

8. 设  $X$  与  $Y$  的相关系数为 0.9,  $Z = X - 0.4$ , 则  $Y$  与  $Z$  的相关系数为 0.9;

9. 已知正常男性成人血液中, 每一毫升白细胞数平均是 7300, 且方差是 700。由切比雪夫不

等式可知每毫升白细胞数  $X$  在 5200-9400 之间的概率  $P\{5200 < X < 9400\} \geq 8/9$ ;

10. 设  $(X, Y)$  的概率分布为

X \ Y	0	2
0	1/3	a
2	b	1/6

已知事件  $\{X=0\}$  与  $\{X+Y=2\}$  相互独立, 则  $a=1/3$ ,  $b=1/6$ ;

11. 设  $X_1, \dots, X_n$  是取自 0-1 分布总体  $b(1, p)$  的样本,  $\bar{X}$  是样本均值, 则  $\sum_{i=1}^n X_i \sim b(n, p)$ , 用

标准正态分布的分布函数  $\Phi(x)$  表示  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\bar{X} \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right)$ .

12.  $X_1, X_2, X_3$  是取自方差大于 0 的总体  $X$  的样本,  $Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ ,  $Y_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$ ,  $Y_3 = \frac{2X_1 - X_2 + 2X_3}{3}$ , 则  $Y_1, Y_2, Y_3$  中  $Y_1$  是总体均值  $\mu = EX$  的最有效估计;

13. 设  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  是取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则  $Y = (X_3 - X_4) / \sqrt{\sum_{i=1}^2 (X_i - \mu)^2}$  服从自由度为 2 的  $t$  分布;

14. 设洗涤剂的去污率服从正态分布, 从甲、乙两个品牌的洗涤剂中分别抽取容量为 6 和 5 的两个样本进行检测, 并求得  $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 36.4$ ,  $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 22.4$ , 则甲去污率的样本方差  $s_1^2 = 7.28$ , 甲、乙去污率的方差比  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$  的 95% 的置信区间为  $(0.139, 9.630)$ ;

$$(F_{0.025}(4, 5) = 7.39, F_{0.025}(5, 4) = 9.36)$$

15. 由于抽样的随机性, 假设检验存在两类错误; 在假设检验中, 通常将需要保护的假设作为原 (零) 假设。

二、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = Ae^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty,$$

求：(1) 系数  $A$ ；(2)  $X$  的分布函数  $F_X(x)$ ；(3)  $Y = 3X + 2$  的概率密度  $f_Y(y)$ 。

解：(1) 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|} dx = 2A \int_0^{+\infty} Ae^{-x} dx = 2A = 1 \quad (2 \text{ 分}) \quad (\text{公式 1 分, 积分 1 分})$$

所以

$$A = \frac{1}{2} \quad (1 \text{ 分})$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(2) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = \frac{1}{2}e^x. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } F_X(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^{-|x|} dx + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{即 } F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

$$(3) Y \text{ 的分布函数 } F_Y(y) = P\{Y \leq y\} \quad (1 \text{ 分})$$

$$= P\{3X + 2 \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{y-2}{3}\right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{(y-2)/3}, & y < 2; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{(2-y)/3}, & y \geq 2. \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^{(y-2)/3}, & y < 2; \\ \frac{1}{6}e^{(2-y)/3}, & y \geq 2. \end{cases}$$

$$= \frac{1}{6}e^{-(y-2)/3}, \quad -\infty < y < \infty \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{或: } y = 3x + 2 \text{ 的反函数 } x = g(y) = \frac{y-2}{3} \text{ 的导数 } g'(y) = \frac{1}{3} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } f_Y(y) = |g'(y)| f_X[g(y)] \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{6}e^{-\frac{|y-2|}{3}} \quad (1 \text{ 分})$$

三、(10 分) 已知  $X$  关于  $Y$  的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)  $X$  与  $Y$  的联合密度函数  $f(x, y)$ ；(2)  $f_X(x)$ ；(3)  $P\left\{Y > \frac{1}{2}\right\}$ 。

$$\text{解: (1) } f(x, y) = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \begin{cases} 15yx^2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_x^1 15yx^2 dy = \frac{15}{2}x^2(1-x^2).$$

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1 \text{ 时, } f_X(x) = 0.$$

即

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{2}x^2(1-x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$(3) P\left\{Y > \frac{1}{2}\right\} = \int_{1/2}^{\infty} f_Y(y) dy \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \int_{1/2}^{\infty} 5y^4 dy \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{31}{32} \quad (1 \text{ 分})$$

四、(每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 设某市每月死于交通事故的人数  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布,  $\lambda > 0$  为未知参数。现有样本观测值: 3, 2, 0, 5, 4, 3, 1, 0, 7, 2, 0, 2。求  $\lambda$  的矩估计值。

(2) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)}, & x > 1; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad \text{其中 } \theta > 1 \text{ 是未知参数,}$$

$X_1, \dots, X_n$  是来自  $X$  的容量为  $n$  的样本,  $x_1, \dots, x_n$  是其一组观测值。求  $\theta$  的极大似然估计值。

$$\text{解: (1) } \bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} x_i = 2.4167, \quad (2 \text{ 分})$$

$$EX = \lambda, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } EX = \lambda = \bar{x}, \text{ 得 } \lambda \text{ 的矩估计值为 } \hat{\lambda} = 2.4167 \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{-(\theta+1)} = \theta^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{-(\theta+1)} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{取对数得 } \ln L(\theta) = n \ln \theta - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

$$\text{解之得 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = n / \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad (2 \text{ 分}) \text{ (过程 1 分, 结果 1 分)}$$

$$\text{故 } \theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = n / \sum_{i=1}^n \ln X_i. \quad (1 \text{ 分})$$

五、(10 分) 假定 18K 项链含金量服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 合格标准是含金量均值为 18K 且标准差不超过 0.3K。从某金店所售 18K 金项链中随机抽取 9 条, 测得含金量如下 (K): 17.3, 16.6, 17.9, 18.2, 17.4, 16.3, 18.5, 17.2, 18.1。问根据上述检测结果能否认为该店出售的 18K 金项链存在质量问题 ( $\alpha = 0.01$ )? 即检验假设

$$H_0^{(1)}: \mu = 18; H_1^{(1)}: \mu \neq 18,$$

$$H_0^{(2)}: \sigma^2 \leq 0.3^2; H_1^{(2)}: \sigma^2 > 0.3^2.$$

附注:  $t_{0.01}(9) = 2.821$ ,  $t_{0.01}(8) = 2.897$ ,  $t_{0.005}(9) = 3.250$ ,  $t_{0.005}(8) = 3.355$ ,

$$\chi^2_{0.005}(9) = 23.589, \chi^2_{0.01}(9) = 21.666, \chi^2_{0.005}(8) = 21.955, \chi^2_{0.01}(8) = 20.090.$$

解: 易见  $n = 9$ ,  $\mu_0 = 18$ ,  $\sigma_0^2 = 0.3^2$ ,  $\bar{x} = 17.5$ ,  $s^2 = 0.55$ ,  $s = 0.742$ ,  $\mu, \sigma$  未知 (1 分)

(1) 先检验假设  $H_0^{(1)}: \mu = 18; H_1^{(1)}: \mu \neq 18$ .

用  $t$  检验法。检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$  关于  $H_0^{(1)}$  的拒绝域为  $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(8) = 3.355$ ,

(2 分) (统计量 1 分, 拒绝域 1 分)

因为  $t$  的样本值  $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = -2.022$ ,  $|t_0| = 2.022 < t_{0.005}(8) = 3.355$ , 所以接受  $H_0^{(1)}$ , 既可

以认为项链的平均含金量为 18K。 (2 分) (样本值 1 分, 结论 1 分)

(2) 再检验假设  $H_0^{(2)}: \sigma^2 \leq 0.3^2; H_1^{(2)}: \sigma^2 > 0.3^2$ .

用  $\chi^2$  检验法。检验统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  关于  $H_0^{(2)}$  的拒绝域为

$$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.01}(8) = 20.090 \quad (2 \text{ 分}) \text{ (统计量 1 分, 拒绝域 1 分)}$$

因为  $\chi^2$  的样本值  $\chi^2_0 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 48.89 > \chi^2_{0.01}(8) = 20.090$ , 所以拒绝  $H_0^{(2)}$ , 既可以认为项

链含金量的标准差大于 0.3K。 (2 分) (样本值 1 分, 结论 1 分)

综上所述, 可以认为该金店的 18K 金项链存在质量问题。 (1 分)

北京邮电大学 2005—2006 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A 卷)

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 60 分，每小题 4 分)

1. 设  $A, B$  两事件相互独立,  $P(A \cup B) = 0.6$ ,  $P(A) = 0.4$ , 则  $P(B) =$  \_\_\_\_\_.
2. 设甲袋中装有 5 只红球, 4 只白球; 乙袋中装有 4 只红球, 5 只白球. 先从甲袋中任取 2 只球放入乙袋, 然后从乙袋中任取一球, 则取到白球的概率是 \_\_\_\_\_.

3. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} k \cos x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ , 则常数  $k =$  \_\_\_\_\_;

$$P\left\{0 < X < \frac{\pi}{4}\right\} = \text{_____}.$$

4. 设随机变量  $\xi$  在  $(1, 6)$  上均匀分布, 则方程  $x^2 + \xi x + 1 = 0$  有实根的概率为 \_\_\_\_\_.
5. 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立同分布, 共同的分布律为

$X$	0	1
$P$	0.4	0.6

则  $P\{X = Y\} =$  \_\_\_\_\_.

6. 设随机变量  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
2	$\alpha$	$\beta$	$\frac{1}{3}$

则  $\alpha, \beta$  应满足的条件是 \_\_\_\_\_.

7. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 用  $Y$  表示对  $X$  的 3 次独立重复观察

中事件  $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$  出现的次数, 则  $P\{Y = 2\} =$  \_\_\_\_\_.

8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim b(n_1, p)$ ,  $Y \sim b(n_2, p)$ , 则  $X + Y$  服从参数为 \_\_\_\_\_ 分布.

9. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(1, 4)$ ,  $Y \sim N(2, 8)$ , 则  $2X + 3Y \sim$  \_\_\_\_\_.

10. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $D(X) = 6$ ,  $D(Y) = 3$ , 则随机变量  $2X - 3Y$  的方差是 \_\_\_\_\_.

11. 设  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(X, Y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$  内服从均匀分布, 则

$$E(X) = \text{_____}.$$

12. 设  $X_1, X_2, \dots$  为相互独立的随机变量序列, 且  $X_i \sim \pi(\lambda), i = 1, 2, \dots$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = \text{_____} \text{ (用分布函数表示)}.$$

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(1, 2^2)$  的一个样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 则

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 \sim \text{_____}.$$

14. 设某种油漆干燥时间  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (单位: 小时), 取  $n = 9$  的样本, 得样本均值为

$$\bar{X} = 6, \text{ 若由以往经验知 } \sigma = 0.6 \text{ (小时)}, \text{ 则 } \mu \text{ 的置信度为 } 95\% \text{ 的置信区间为: } \text{_____}.$$

$$(z_{0.025} = 1.96)$$

15. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, 1)$  的一个样本,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  为来自总体  $N(\mu, 2^2)$

的一个样本,  $\mu$  的一个无偏估计有形式  $T = a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{j=1}^m Y_j$ , 则  $a$  和  $b$  应满足条件 \_\_\_\_\_.

二、(8分) 设离散型随机变量  $X$  的分布律为

$X$	-1	0	1	2	3
$P$	$k$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求 (1)  $k$  的值; (2)  $Y = |X|$  的分布律; (3)  $Y = 2X - 1$  的分布律。

三、(12分) 设雷达的圆形屏幕的半径为  $R$ , 目标点  $(X, Y)$  在屏幕上均匀出现, 求

(1)  $(X, Y)$  的概率密度; (2) 边缘概率密度  $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$ ;

(3)  $X, Y$  是否相互独立; (4)  $f_{X|Y}(x|y)$ 。

四、(10分) 设总体  $X$  的分布律为:

$X$	0	1	2	3
$P$	$p^2$	$2p(1-p)$	$p^2$	$1-2p$

其中  $p$  ( $0 < p < 1/2$ ) 是未知参数。利用总体  $X$  的如下样本值:

1, 3, 0, 2, 3, 3, 1, 3

求 (1)  $p$  的矩估计值; (2)  $p$  的极大似然估计值。

五、(10分) (1) 根据长期的经验, 某工厂生产的特种金属丝的折断力  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (单位: kg)。

已知  $\sigma = 8$  kg, 现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取 10 个样品,

测得样本均值  $\bar{x} = 575.2$  kg。问这批特种金属丝的平均折断力可否认为是 570 kg?

( $\alpha = 5\%$ ) 即检验假设  $H_0: \mu = 570, H_1: \mu \neq 570$ 。( $\sqrt{10} = 3.1623$ )。

(2) 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布  $N(\mu, 0.048^2)$ 。某日抽取 5 个样品,

测得其纤度为: 1.31, 1.55, 1.34, 1.40, 1.45。

问: 这天的纤度的总体方差是否正常? 试用  $\alpha = 10\%$  作假设检验, 即检验假设

$H_0: \sigma^2 = 0.048^2 (= 0.0023), H_1: \sigma^2 \neq 0.048^2$ 。( $\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2 = 0.0362$ )。

附表: 标准正态分布数值表  $\chi^2$  分布数值表  $t$  分布数值表

$\Phi(0.28) = 0.6103$	$\chi_{0.05}^2(4) = 9.488$	$t_{0.025}(15) = 2.1315$
$\Phi(1.96) = 0.975$	$\chi_{0.95}^2(4) = 0.711$	$t_{0.05}(15) = 1.7531$
$\Phi(2.0) = 0.9772$	$\chi_{0.05}^2(5) = 11.071$	$t_{0.025}(16) = 2.1199$
$\Phi(2.5) = 0.9938$	$\chi_{0.95}^2(5) = 1.145$	$t_{0.05}(16) = 1.7459$

北京邮电大学 2005—2006 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (A 卷)

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 60 分，每小题 4 分)

1. 设  $A, B$  两事件相互独立,  $P(A \cup B) = 0.6$ ,  $P(A) = 0.4$ , 则  $P(B) = \underline{1/3}$ 。

2. 设甲袋中装有 5 只红球, 4 只白球; 乙袋中装有 4 只红球, 5 只白球。先从甲袋中任取 2 只球放入乙袋, 然后从乙袋中任取一球, 则取到白球的概率是  $\underline{53/99}$ 。

3. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} k \cos x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ , 则常数  $k = \underline{1/2}$ 。

$P\{0 < X < \frac{\pi}{4}\} = \underline{\sqrt{2}/4}$ 。4. 设随机变量  $\xi$  在  $(1, 6)$  上均匀分布, 则方程  $x^2 + \xi x + 1 = 0$

有实根的概率为  $\underline{4/5}$ 。

5. 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立同分布, 共同的分布律为

$X$	0	1
$P$	0.4	0.6

则  $P\{X=Y\} = \underline{0.52}$ 。

6. 设随机变量  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
2	$\alpha$	$\beta$	$\frac{1}{3}$

则  $\alpha, \beta$  应满足的条件是  $\alpha + \beta = 1/3$ ; 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $\alpha = \underline{1/9}$ ,  $\beta = \underline{2/9}$ 。

7. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 用  $Y$  表示对  $X$  的 3 次独立重复观察

中事件  $\{X \leq \frac{1}{2}\}$  出现的次数, 则  $P\{Y=2\} = \underline{9/4^3}$ 。

8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim b(n_1, p)$ ,  $Y \sim b(n_2, p)$ , 则  $X+Y$  服从参数为  $\underline{n_1+n_2}$  的二项分布。

9. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(1, 4)$ ,  $Y \sim N(2, 8)$ , 则  $2X+3Y \sim \underline{N(8, 88)}$ 。

10. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $D(X)=6$ ,  $D(Y)=3$ , 则随机变量  $2X-3Y$  的方差是  $\underline{51}$ 。

11. 设  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(X, Y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$  内服从均匀分布, 则  $E(X) = \underline{1/3}$ ;  $E(Y) = \underline{1/3}$ ;  $Cov(X, Y) = \underline{-1/36}$ 。

12. 设  $X_1, X_2, \dots$  为相互独立的随机变量序列, 且  $X_i \sim \pi(\lambda), i=1, 2, \dots$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = \underline{\Phi(x)}.$$

13. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(1, 2^2)$  的一个样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 则  $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 \sim \underline{\chi^2(n)}$ 。

14. 设某种油漆干燥时间  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (单位: 小时), 取  $n=9$  的样本, 得样本均值和方差分别为  $\bar{X}=6$ , 若由以往经验知  $\sigma=0.6$  (小时), 则  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间为:  $\underline{(5.608, 6.392)}$  ( $z_{0.025}=1.96$ )。

15. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, 1)$  的一个样本,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  为来自总体  $N(\mu, 2^2)$  的一个样本,  $\mu$  的一个无偏估计有形式  $T = a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{j=1}^m Y_j$ , 则  $a$  和  $b$  应满足条件  $\underline{an+bm=1}$ 。



二、(8分) 设离散型随机变量  $X$  的分布律为

$X$	-1	0	1	2	3
$P$	$k$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求 (1)  $k$  的值; (2)  $Y=|X|$  的分布律; (3)  $Y=2X-1$  的分布律。

解: (1)  $k=2/10$  (2分)

(2)  $Y=|X|$  的分布律为

$ X $	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

(3分)

(3)  $Y=2X-1$  的分布律为

$2X-1$	-3	-1	1	3	5
$P$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

(3分)

三、(12分) 设雷达的圆形屏幕的半径为  $R$ , 目标点在屏幕上均匀出现, 目标点的坐标为  $(X, Y)$ ,

求

(1)  $(X, Y)$  的概率密度; (2) 边缘概率密度  $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$ ;

(3)  $X, Y$  是否相互独立; (4)  $f_{X|Y}(x|y)$ 。

解: (1)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & x^2 + y^2 < R^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ ; (2分)

(2) 当  $-R < x < R$  时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2},$$

$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} & |x| < R \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; (3分)$$

当  $-R < y < R$  时

$$\text{同理 } f_Y(y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi R^2} dx = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2};$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi} & |y| < R \\ 0 & \text{其他} \end{cases} (3分)$$

(3) 不相互独立。(2分)

(4) 当  $-R < y < R$  时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}} & -\sqrt{R^2-y^2} < x < \sqrt{R^2-y^2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} (2分)$$

四、(10分) 设总体  $X$  的概率分布律为:

$X$	0	1	2	3
$P$	$p^2$	$2p(1-p)$	$p^2$	$1-2p$

其中  $p$  ( $0 < p < 1/2$ ) 是未知参数, 利用总体  $X$  的如下样本值:

1, 3, 0, 2, 3, 3, 1, 3

求 (1)  $p$  的矩估计值; (2)  $p$  的极大似然估计值。

解: (1)  $\bar{X} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 X_i = 16/8 = 2$ , 令  $E(X) = 3-4p = \bar{X}$ , (2分)

得  $p$  的矩估计为  $\hat{p} = (3-\bar{X})/4 = 1/4$ . (2分)

(2) 似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^8 P(X=x_i) = P(X=0)[P(X=1)]^2 P(X=2)[P(X=3)]^4$$

$$= 4p^6(1-p)^2(1-2p)^4 (2分)$$

$$\ln L(p) = \ln 4 + 6 \ln p + 2 \ln(1-p) + 4 \ln(1-2p)$$

$$\text{令 } [\ln L(p)]' = \frac{6}{p} - \frac{2}{1-p} - \frac{8}{1-2p} = 0, \Rightarrow 12p^2 - 14p + 3 = 0 (2分)$$

$$\Rightarrow p = (7 \pm \sqrt{13})/12. \text{ 由 } 0 < p < 1/2, \text{ 故 } p = (7 + \sqrt{13})/12 \text{ 舍去}$$

所以  $p$  的极大似然估计值为  $\hat{p} = (7 - \sqrt{13})/12$  (2分)

$$\chi_0^2 = 0.0362/0.0023 = 15.739 > 9.488, \text{ 落在拒绝域内,}$$

五、(10分)(1) 根据长期的经验, 某工厂生产的特种金属丝的折断力  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (单位: kg)。已知  $\sigma = 8$  kg, 现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取 10 个样品, 测得样本均值  $\bar{x} = 575.2$  kg。问这批特种金属丝的平均折断力可否认为是 570 kg?

故拒绝原假设  $H_0$ , 即认为该天的纤度的总体方差不正常。 (2分)

( $\alpha = 5\%$ ) 即检验假设  $H_0: \mu = 570, H_1: \mu \neq 570$ 。

(2) 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布  $N(\mu, 0.048^2)$ 。某日抽取 5 个样品, 测得其纤度为: 1.31, 1.55, 1.34, 1.40, 1.45。

问: 这天的纤度的总体方差是否正常? ( $\alpha = 10\%$ ) 即检验假设

$$H_0: \sigma^2 = 0.048^2, H_1: \sigma^2 \neq 0.048^2.$$

解: (1) 要检验的假设为  $H_0: \mu = 570, H_1: \mu \neq 570$

$$\text{检验用的统计量 } U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

$$\text{拒绝域为 } |U| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96. \quad (3 \text{ 分})$$

$$|U_0| = \frac{575.2 - 570}{8/\sqrt{10}} = 0.65\sqrt{10} = 2.06 > 1.96, \text{ 落在拒绝域内,}$$

故拒绝原假设  $H_0$ , 即不能认为平均折断力为 570 kg. (2分)

(2) 要检验的假设为  $H_0: \sigma^2 = 0.048^2, H_1: \sigma^2 \neq 0.048^2$

$$\text{检验用的统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

$$\text{拒绝域为 } \chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(4) = 9.488 \quad \text{或}$$

$$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(4) = 0.711 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\bar{x} = 1.41$$

2006—2007 学年概率论与数理统计 (C) 期末试题 2007.7.3 (共 3 页)

第①页 专业\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_

我郑重承诺：

在本次考试中，遵守考场纪律、自觉自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。

签字：\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	总分
题分	30	30	30	10	100
得分					

得分	评卷人

一、简算下列各题（每小题 6 分，共计 30 分）

1. 设  $P(A)=0.5$ ,  $P(B)=0.4$ ,  $P(A|\bar{B})=0.6$ , 求:  $P(A|A \cup \bar{B})$ ,  $P(AB)$ .

(6 分) 得分

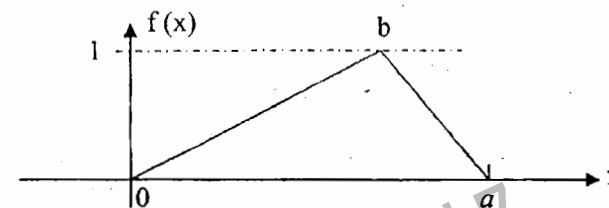
2. 设随机变量  $X$  的概率密度函数为 
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ax^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

求: (1) 系数  $A$ ; (2)  $X$  落在区间  $[0, 0.5]$  上的概率。

(6 分) 得分

3. 下图为连续型随机变量  $X$  的密度函数图形，试确定常数  $a$ 。

(6 分) 得分



4. 设二维离散型随机向量  $(X, Y)$  的分布律为

X \ Y	-1	1	2
-1	5/20	2/20	6/20
2	3/20	3/20	1/20

求: 随机变量函数  $Z=X+Y$  的分布律。

(6 分) 得分

5. 设随机变量  $X, Y$  相互独立，且  $P\{X=0\}=0.6$ ,  $P\{X=1\}=0.4$ ;  $P\{Y=0\}=0.5$ ,  $P\{Y=1\}=0.5$ ,

求:  $E(XY)$ 。

(6 分) 得分

第②页 专业\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_

得分	评卷人

二、计算题（本题共 3 小题，共 30 分）

6. 某厂有三部机器生产同种零件，其中甲机器生产的零件占总产量的 40%，乙机器占 25%，丙机器占 35%，若机器甲、乙、丙生产的不合格零件分别为各自产量的 10%、5% 和 1%。

- (1) 现从总产品中随机地抽取一个零件，它是不合格品的概率是多少？  
 (2) 现从总产品中随机地抽取一个零件，检查为不合格品，那么它是由甲机器生产出来的概率是多少？

(8 分) 得分

7. 设随机向量  $(X, Y)$  的联合密度函数为：

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 < y < x < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求：(1) 随机向量  $(X, Y)$  的边缘密度；(2) 条件密度  $f_{Y|X}(y|x)$ ；(3) 求  $X$  和  $Y$  的协方差；

(4) 求  $X$  和  $Y$  的相关系数；(5) 求  $P\{X+Y \leq 1\}$ 。

(12 分) 得分

8. 炮火轰击敌方防御工事 100 次，每次轰击命中的炮弹数服从同一分布，其数学期望为 2，标准差为 1.5，若各次轰击命中防御工事的炮弹数是相互独立的，求 100 次轰击可以至少命中 180 发炮弹的概率。 ( $\Phi_0(1) = 0.8413, \Phi_0(1.33) = 0.90824$ )

(10 分) 得分

得分	评卷人

三、计算题（本题共三题，共 30 分）

9. 假设某总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，从该总体中取出容量为  $n$  的两组相互独立的样本  $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n})$  及  $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n})$ ，计算出两组样本的平均值记为  $\bar{X}_1$  和  $\bar{X}_2$ ，试确定  $n$ ，使得：

$$P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > \sigma) \approx 0.01. \quad (\text{注: } \Phi_0(2.58) = 0.995, \Phi_0(1.645) = 0.95) \quad (10 \text{ 分}) \quad \text{得分}$$

第③页 专业 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

10. 设总体  $X$  的密度函数  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} & x > 0, \text{ 且 } (\theta > 0), \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

取样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 求: 总体参数  $\theta$  的最大似然估计量。

(10 分) 得分   

11. 某厂生产的电子元件寿命服从方差为  $\sigma_0^2 = 10\,000$  (小时<sup>2</sup>) 的正态分布. 现采用一种能提高元件效率的新工艺进行生产, 并从生产线随机抽取 26 只元件测出其寿命的样本方差为  $s^2 = 12\,000$  (小时<sup>2</sup>), 试根据显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 试作如下显著性检验  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .

$[\chi_{0.025}^2(25) = 40.646, \chi_{0.025}^2(26) = 41.923, \chi_{0.975}^2(26) = 13.844, \chi_{0.975}^2(25) = 13.12]$

(10 分) 得分   

得分	评卷人

四、计算题 (本题 10 分)

12. 设总体  $X$  的密度函数为:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 为该总体的样本,}$$

$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 试比较估计量  $\frac{4}{3}\bar{X}$  与  $\frac{3n+1}{3n}Y_n$  哪个更有效? (10 分) 得分

1

北京邮电大学 2005-2006 学年第 2 学期

(( 概率论与数理统计 )) 期末考试试题 (B) 标准答案

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 32 分)

已知:  $\Phi(1.65) = 0.950$ ,  $\Phi(1.96) = 0.975$ ,  $z_{0.025} = 1.96$

1. 从正态总体  $N(3.4, 6^2)$  中抽取容量为  $n$  的样本, 则样本均值  $\bar{X}$  的分布是 \_\_\_\_\_, 如果要求其样本均值  $\bar{X}$  位于区间  $(1.4, 5.4)$  内的概率不小于 0.95, 问样本容量  $n$  至少取 \_\_\_\_\_.

解 样本均值  $\bar{X}$  的分布是:  $\bar{X} \sim N\left(3.4, \frac{6^2}{n}\right)$  (2 分), 则

$$\frac{\bar{X} - 3.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

从而

$$\begin{aligned} P\{1.4 < \bar{X} < 5.4\} &= P\{-2 < \frac{\bar{X} - 3.4}{6/\sqrt{n}} < 2\} \\ &= P\{|\bar{X} - 3.4| < 2\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X} - 3.4}{6/\sqrt{n}}\right| < \frac{2\sqrt{n}}{6}\right\} \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \geq 0.95, \end{aligned}$$

故  $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.975$ , 由此得  $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.96$ , 即  $n \geq (1.96 \times 3)^2 \approx 34.57$ , 所以  $n$  至少应取 35 (2 分).

2. 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases} X_1, X_2, \dots, X_n$

是来自总体  $X$  的简单随机样本, 则未知参数  $\theta$  的矩估计量是 \_\_\_\_\_.

解 总体  $X$  的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{\theta}^{+\infty} xe^{-(x-\theta)}dx = \theta + 1,$$

于是  $\theta$  的矩估计量是  $\hat{\theta} = \bar{X} - 1$  (4 分).

3. 设随机过程  $X(t) = U + tV, -\infty < t < +\infty$ , 其中  $U, V$  是相互独立的随机变量, 且都服从标准正态分布  $N(0, 1)$ , 则随机过程  $X(t)$  的一维分布函数  $F(x; 3) =$  \_\_\_\_\_.

2

解 当  $t = 3$  时,  $X(3) = U + 3V$ . 因为  $U, V$  是相互独立的随机变量, 且都服从标准正态分布  $N(0, 1)$ , 所以  $X(3) \sim N(0, 10)$ , 所以其分布函数为

$$F(x; 3) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{20\pi}} e^{-\frac{t^2}{20}} dt. \quad (4 \text{ 分})$$

4. 设随机过程  $Y(t) = X \cos \omega t, -\infty < t < +\infty$ , 其中  $\omega$  为常数, 而  $X$  是服从标准正态分布  $N(0, 1)$  的随机变量, 则随机过程  $Y(t)$  的均值函数是 \_\_\_\_\_, 自相关函数是 \_\_\_\_\_.

解 随机过程  $Y(t)$  的均值函数是  $m_Y(t) = 0$  (2 分), 自相关函数是  $R_Y(t_1, t_2) = \cos \omega t_1 \cos \omega t_2$  (2 分).

5. 设顾客到达某车站的顾客数为泊松过程, 平均每 2 分钟到达 1 位顾客, 则在 20 分钟内到达车站至少有 2 位顾客的概率是 \_\_\_\_\_.

解 设  $N(t)$  表示在  $[0, t)$  内到达车站的人数, 则  $\{N(t), t \geq 0\}$  为泊松过程, 由题设可知, 强度为  $\lambda = 0.5$  (人 / 分钟), 故

$$N(t) \sim \pi(0.5t),$$

所以, 在 20 分钟内到达车站至少有 2 位顾客的概率是

$$\begin{aligned} P\{N(20) \geq 2\} &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(0.5 \times 20)^k e^{-0.5 \times 20}}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^1 \frac{10^k e^{-10}}{k!} \\ &= 1 - 11e^{-10}. \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

6. 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  为一个齐次马尔可夫链, 其状态空间  $I = \{0, 1, 2\}$ , 初始分布为  $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 2\} = \frac{1}{4}, P\{X_0 = 1\} = \frac{1}{2}$ , 一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

则  $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\} =$  \_\_\_\_\_,  $P\{X_2 = 2 | X_0 = 0\} =$  \_\_\_\_\_.

3

解 根据齐次马尔可夫特性, 可得

$$\begin{aligned} & P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\} \\ &= P\{X_2 = 2|X_1 = 1\} \cdot P\{X_1 = 1|X_0 = 0\} \cdot P\{X_0 = 0\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

因为两步转移概率矩阵为

$$P^{(2)} = PP = \begin{pmatrix} 5/16 & 7/16 & 1/4 \\ 7/36 & 4/9 & 13/36 \\ 1/12 & 13/48 & 31/48 \end{pmatrix}$$

所以  $P\{X_2 = 2|X_0 = 0\} = \frac{1}{4}$  (2 分).

7. 用机器装罐头, 已知罐头重量服从正态分布  $N(\mu, 0.02^2)$ . 随机抽取 25 个罐头进行测量, 计算得其样本均值  $\bar{x} = 1.01\text{kg}$ , 则总体均值  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间为

解 由于  $\sigma^2$  已知, 故利用置信区间公式:

$$\left( \bar{X} - z_{\alpha/2}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

现在  $\alpha = 0.05$ ,  $n = 25$ ,  $\bar{x} = 1.01$ , 并查表得  $z_{0.025} = 1.96$ , 代入公式, 得置信区间为  $(1.002, 1.018)$  (4 分).

8. 在双因素重复试验的方差分析中,  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (X_{ijk} - \bar{X}_{ij}) (\bar{X}_{i.} - \bar{X})$

解

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (X_{ijk} - \bar{X}_{ij}) (\bar{X}_{i.} - \bar{X}) \\ &= \sum_{i=1}^r (\bar{X}_{i.} - \bar{X}) \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (X_{ijk} - \bar{X}_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^r (\bar{X}_{i.} - \bar{X}) \left( \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk} - \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \bar{X}_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^r (\bar{X}_{i.} - \bar{X}) \left( \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk} - \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk} \right) = 0. \end{aligned}$$

4

二. 计算或证明题.

已知:  $F_{0.95}(9, 9) = 3.18$ ,  $t_{0.05}(6) = 1.9432$ ,  $t_{0.05}(18) = 1.7341$

$F_{0.025}(9, 9) = 4.03$ ,  $t_{0.025}(6) = 2.4469$ ,  $t_{0.025}(18) = 2.1009$ .

1. (12 分) 设齐次马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 1\}$  的状态空间  $I = \{1, 2, 3, 4\}$ , 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

试求  $P^2$ , 并问马尔可夫链是否遍历, 若是, 请求其极限分布.

解 两步转移概率矩阵为

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \begin{pmatrix} 10/16 & 4/16 & 2/16 & 0 \\ 4/16 & 4/16 & 6/16 & 2/16 \\ 1/16 & 3/16 & 9/16 & 3/16 \\ 0 & 3/16 & 9/16 & 4/16 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

因为

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

中的每一元均大于 0, 故由书中 pp. 368 定理知此链具有遍历性 (3 分). 其极

5

限分布  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$  满足  $\pi = \pi P$  及  $\sum_{i=1}^4 \pi_i = 1 (\pi_i > 0)$  (2分). 于是, 从

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{以及 } \sum_{i=1}^4 \pi_i = 1,$$

即

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2, \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3, \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4, \\ \pi_4 = \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4, \\ \sum_{i=1}^4 \pi_i = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_2, \\ \pi_3 = 2\pi_2 = 2\pi_1, \\ \pi_4 = \frac{1}{3}\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_1. \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

从而

$$\pi_1 + \pi_1 + 2\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \frac{3}{14}, \pi_3 = \frac{6}{14}, \pi_4 = \frac{2}{14}.$$

即得极限分布为  $(\frac{3}{14}, \frac{3}{14}, \frac{6}{14}, \frac{2}{14})$  (2分).

2(11分). 试证随机过程  $X(t) = \xi \cos \lambda t + \eta \sin \lambda t$  ( $-\infty < t < +\infty$ , 常数  $\lambda > 0$ ) 是平稳随机过程的充要条件为  $\xi$  和  $\eta$  是具有零均值, 方差相同的互不相关的随机变量.

证 充分性 因为

$$EX(t) = \cos(\lambda t) \cdot E\xi + \sin(\lambda t) \cdot E\eta = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

$$R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$= E\{[\xi \cos \lambda t + \eta \sin \lambda t][\xi \cos(\lambda t + \lambda \tau) + \eta \sin(\lambda t + \lambda \tau)]\}$$

$$= \cos(\lambda t + \lambda \tau) \cos(\lambda t) \cdot E\xi^2 + \sin(\lambda t + \lambda \tau) \sin(\lambda t) E\eta^2$$

$$+ [\cos(\lambda t + \lambda \tau) \sin(\lambda t) + \sin(\lambda t + \lambda \tau) \cos(\lambda t)] E(\xi\eta) \quad (2 \text{ 分})$$

$$= D\xi \cdot \cos(\lambda \tau) = \sigma^2 \cos(\lambda \tau). \quad (2 \text{ 分})$$

6

又显然  $E[X(t)]^2 = R_X(t, t) = \sigma^2 < \infty$ , 故由定义知  $\{X(t)\}$  是一平稳随机过程 (2分).

必要性 因  $X(t)$  平稳, 故必

$$EX(t) = \cos(\lambda t) \cdot E\xi + \sin(\lambda t) \cdot E\eta = \text{常数 (与 } t \text{ 无关)},$$

所以只能  $E\xi = E\eta = 0$  (2分).

再由  $R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$ , 特别的  $R_X(t, t) = R_X(0) = \text{常数}$ , 即

$$\cos^2(\lambda t) E\xi^2 + \sin^2(\lambda t) E\eta^2 + 2\cos(\lambda t) \sin(\lambda t) \cdot E(\xi\eta) = \text{常数}$$

而与  $t$  无关, 只能  $E(\xi\eta) = 0$  且  $E\xi^2 = E\eta^2 = D\xi = D\eta$  (2分). 这就证明了  $\xi, \eta$  是互不相关且均值为零, 方差相同的随机变量 (2分).

3(14分). 为了考察某种毒药的剂量 (以 mg/单位容量计) 与老鼠死亡之间的关系, 取多组老鼠 (每组 25 只) 作试验, 得数据如下:

剂量 $x$	4	6	8	10	12	14	16	18
死亡鼠数 $y$	1	3	6	8	14	16	20	21

(1) 求  $y$  对  $x$  的回归直线方程, 并估计当剂量为 7 时, 死亡的鼠数.

(2) 在  $\alpha = 0.05$  下检验  $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$ .

解 为了求  $y$  对  $x$  的线性回归方程, 将数据列表如下:

$x$	$y$	$x^2$	$y^2$	$xy$	
4	1	16	1	4	
6	3	36	9	18	
8	6	64	36	48	
10	8	100	64	80	
12	14	144	196	168	
14	16	196	256	224	
16	20	256	400	320	
18	21	324	441	378	
$\Sigma$	88	89	1136	1403	1240



7

于是

$$S_{xx} = \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_i x_i \right)^2 = 1136 - \frac{1}{8} \times 88^2 = 168, \quad (1 \text{ 分})$$

$$S_{xy} = \sum_i x_i y_i - \frac{1}{n} \left( \sum_i x_i \right) \left( \sum_i y_i \right) = 1240 - \frac{1}{8} \times 88 \times 89 = 261, \quad (1 \text{ 分})$$

$$S_{yy} = \sum_i y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_i y_i \right)^2 = 1403 - \frac{1}{8} \times 89^2 = 412.875, \quad (1 \text{ 分})$$

从而

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{261}{168} = 1.5536, \quad (1 \text{ 分})$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_i y_i - \left( \frac{1}{n} \sum_i x_i \right) \hat{b} = \frac{89}{8} - \frac{88}{8} \times 1.5536 = -5.9646. \quad (1 \text{ 分})$$

所以得线性回归方程为  $\hat{y} = -5.9646 + 1.5536x$  (1 分). 当  $x = 7$  时,  $\hat{y} = -5.9646 + 1.5536 \times 7 = 4.9106$  (2 分).

其次, 因为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{yy} - \hat{b} S_{xy}}{n-2} = \frac{1}{6} [412.875 - 1.5536 \times 261] = 1.2309. \quad (2 \text{ 分})$$

$$|t| = \frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}} = \frac{1.5536}{\sqrt{1.2309}} \sqrt{168} = 18.1502 > t_{0.025}(6) = 2.4469. \quad (2 \text{ 分})$$

故拒绝  $H_0$ , 认为回归方程是显著的 (2 分).

4(14 分). 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是  $X$  的一组样本.

(1) 求  $k$ , 使  $\hat{\sigma}^2 = k \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计量.

(2) 求  $k$ , 使  $\hat{\sigma} = k \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$  是  $\sigma$  的无偏估计量.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} E(X_{i+1} - X_i)^2 &= D(X_{i+1} - X_i) + [E(X_{i+1} - X_i)]^2 \\ &= DX_{i+1} + DX_i = 2\sigma^2. \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

所以

$$\begin{aligned} E\hat{\sigma}^2 &= kE \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \right] = k \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1} - X_i)^2 \\ &= 2k(n-1)\sigma^2. \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

8

令  $E\hat{\sigma}^2 = 2k(n-1)\sigma^2 = \sigma^2$ , 则得  $k = \frac{1}{2(n-1)}$  (2 分).

(2) 因为

$$E\hat{\sigma} = kE \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}| = k \sum_{i=1}^n E|X_i - \bar{X}| = nkE|X_1 - \bar{X}|, \quad (2 \text{ 分})$$

下面求  $E|X_1 - \bar{X}|$ , 注意到  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  且相互独立, 故

$$\begin{aligned} X_1 - \bar{X} &= X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \frac{1}{n} [(n-1)X_1 - X_2 - \dots - X_n] \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right), \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

于是

$$\begin{aligned} E|X_1 - \bar{X}| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2} \quad \text{令 } t = \frac{x}{\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2} \left( -e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}. \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

当  $E\hat{\sigma} = nk \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2} = \sigma$  时, 得  $k = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$  (2 分).

5(14 分). 为了比较甲、乙两种安眠药的疗效, 将 20 个患者平均分成甲、乙两组, 甲、乙组病人分别服用甲、乙两种安眠药, 得延长睡眠时间的数据如下 (单位为小时):

甲组 1.9 0.8 1.1 0.1 -0.1 4.4 5.5 1.6 4.6 3.4

乙组 0.7 -0.6 -0.2 -1.2 -0.1 3.4 3.7 0.8 0 2.0

假定用药后, 甲、乙组病人延长的睡眠时间各服从  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  与  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  且  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$  均未知, 试在  $\alpha = 0.05$  下检验两种安眠药的疗效有无显著差异? (提示: 先检验假设:  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ; 在此基础上再检验假设:  $\mu_1 = \mu_2$ )

9

解 首先检验  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  (2 分). 将数据列表为

甲组 $x$	$x^2$	乙组 $y$	$y^2$
1.9	3.61	0.7	0.49
0.8	0.64	-0.6	0.36
1.1	1.21	-0.2	0.04
0.1	0.01	-1.2	1.44
-0.1	0.01	-0.1	0.01
4.4	19.36	3.4	11.56
5.5	30.25	3.7	13.69
1.6	2.56	0.8	0.64
4.6	21.16	0	0
3.4	11.56	2.0	4.0
3.4	11.56	2.0	4.0
$\Sigma$	23.3	8.5	32.22

于是得  $\bar{x} = 2.33, S_1^2 = \frac{1}{9} \left( \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{9} (90.37 - 2.33 \times 23.3) = 1.009$ .

$\bar{y} = 0.85, S_2^2 = \frac{1}{9} (32.22 - 0.85 \times 8.5) = 2.778$  (2 分). 拒绝域为

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\alpha/2}(9, 9), \text{ 或 } \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\alpha/2}(9, 9), \quad (2 \text{ 分})$$

现在  $\alpha = 0.05$ , 且  $F_{0.025}(9, 9) = 4.03, F_{0.975}(9, 9) = \frac{1}{F_{0.025}(9, 9)} = 0.2481$ . 显然

$$0.2481 < \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.009}{2.778} = 1.4431 < 4.03,$$

故接受  $H_0$ , 即认为  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  (2 分).

再在  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \triangleq \sigma^2$  下, 检验  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  (2 分). 因为  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  未知, 故拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \quad (2 \text{ 分})$$

10

$$\text{现在 } S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{9(4.009 + 2.778)}{18}} = 1.8421,$$

并且

$$|t| = \left| \frac{2.33 - 0.85}{1.8421 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} \right| = \frac{1.48}{0.8238} = 1.7966 < t_{0.025}(18) = 2.1009,$$

故接受  $H_0$ , 认为两种安眠药无显著差异 (2 分).

北京邮电大学 2005 — 2006 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B)

考 试 注 意 事 项	<p>一、学生参加考试须带学生证或学院证明，未带者不准进入考场。学生必须按照监考教师指定座位就坐。</p> <p>二、书本、参考资料、书包等与考试无关的东西一律放到考场指定位置。</p> <p>三、学生不得另行携带、使用稿纸，要遵守《北京邮电大学考场规则》，有考场违纪或作弊行为者，按相应规定严肃处理。</p> <p>四、学生必须将答题内容做在专用答题纸上，做在试卷、草稿纸上一律无效。</p>									
考试课程				考试时间		年 月 日				
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	
满分	10	15	15	10	20	10	15	5	100	
得分										
阅卷教师										

一、已知  $P(A) = 1/2$ ,  $P(B) = 1/3$ , 按下列条件:

试求  $P(A \cup B)$  的值。

(1)  $P(A|B) = 0$ ; (2)  $P(A|B) = P(A)$ ;

(3)  $P(\bar{A}|B) = P(B)$ 。

二、设随机变量  $X$  的概率密度为:  $f(x) = \begin{cases} Ae^{-x^2+2x}, & x < 1, \\ B, & 1 \leq x < 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

其中  $A, B$  为大于零的常数, 且已知  $P(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$ 。

求 (1)  $A, B$  的值;

(2) 随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ ;

要求: 所求结果用  $\Phi(x)$  表示, 其中  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 。

三、设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 12xy^2, & 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求  $X, Y$  的边缘密度  $f_X(x), f_Y(y)$ , 并判断  $X, Y$  是否独立;

(2) 求  $Z = X + Y$  的概率密度  $f_Z(z)$ 。

四、设  $X \sim N(10, 2^2)$ ,  $Y = X - 10$ ,  $W = \left(\frac{X-10}{2}\right)^2$ , 求  $D(Y-W)$ 。

五、设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, a, b) = \begin{cases} a^b bx^{b-1}, & x \geq a, \\ 0, & x < a, \end{cases}$

其中参数  $a > 0$  已知,  $b > 0$  未知,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自总体  $X$  的样本。

求未知参数  $b$  的最大似然估计和矩估计。

六、甲乙两台机床同时独立的加工某种轴, 轴的直径分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。今从甲机床加工的轴中随机地任取 8 根, 测量它们的直径, 并算出其样本方差为 0.2164, 从乙机床加工的轴中随机的任取 7 根, 测量它们的直径, 并算出其样本方差为 0.2729, 问在显著水平  $\alpha = 0.05$  下, 两台机床加工的轴的直径方差是否有显著差异。

七、设总体  $X \sim N(0, 2^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  为来自总体  $X$  的样本。令

$$Y = \left(\sum_{i=1}^5 X_i\right)^2 + \left(\sum_{j=6}^{10} X_j\right)^2$$

试确定常数  $C$ , 使  $CY$  服从  $\chi^2$  分布, 并指出其自由度。

八、证明题

设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

求证:  $P(0 < X < 2(n+1)) \geq \frac{n}{n+1}$

附表:

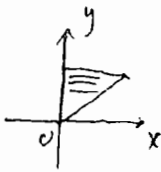
$$(1) \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(0.8) = 0.7881, \Phi(1) = 0.8431.$$

$$(2) P\{F(n_1, n_2) > F_{\alpha}(n_1, n_2)\} = \alpha.$$

$$F_{0.05}(7, 6) = 4.21, F_{0.05}(6, 7) = 3.87$$

$$F_{0.025}(7, 6) = 5.70, F_{0.025}(6, 7) = 5.12$$

$$\begin{aligned} (1) f_Z(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_x^1 12x^2 dy & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ (15分) &= \begin{cases} 12(x^2-x^3) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3分) \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^y 12x^2 dx & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4y^3 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3分) \end{aligned}$$

又:  $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$  故不独立. (4分)

$$\begin{aligned} (2) f_Z(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y-x) dx \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y-x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq 1+x \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^{\frac{y}{2}} 12x^2 dx & 0 \leq y < 1 \\ \int_{y-1}^{\frac{y}{2}} 12x^2 dx & 1 \leq y < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3分) \\ \text{则 } f_Z(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2}y^3 & 0 \leq y \leq 1 \\ 4(\frac{y}{2} - (y-1))^3 & 1 \leq y < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad -\frac{7}{2}x^3 + 12x^2 - 12x + 4 \quad (2分) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10分) \text{ Ⅲ } D(Y-W) &= D(Y) + D(W) - 2\text{Cov}(Y,W) \quad (2分) \\ \text{而 } Z &\sim N(10, 2^2) \quad \therefore Y = Z - 10 \sim N(0, 2^2) \quad (2分) \\ \text{则 } D(Y) &= 2^2 \quad E(Y) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{而 } W = \left(\frac{X-10}{2}\right) \sim \chi^2(1) \quad \therefore D(W) = 2 \quad (2分)$$

$$\text{Cov}(Y, W) = E(YW) - E(Y)E(W) = E(YW)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-10) \cdot \left(\frac{x-10}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x-10)^2}{2 \cdot 2^2}} dx = 0. \quad (2分)$$

$$\therefore D(Y-W) = 4 + 2 = 6. \quad (2分)$$

$$\text{Ⅱ } (5分) \text{ ① } L = b^a a^b \prod_{i=1}^n x_i^{-(b+1)} \quad (5分)$$

$$(20分) \ln L = n \ln b + n b \ln a - (b+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\frac{d \ln L}{d b} = \frac{n}{b} + n \ln a - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0. \quad (2分)$$

$$\therefore b \text{ 的极大值点为 } \hat{b} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln a} \quad (3分)$$

$$\text{② } E(X) = \int_a^{+\infty} x a^b b x^{-(b+1)} dx = \frac{ab}{b-1} \quad (5分)$$

$$\therefore b = \frac{E(X)}{E(X)-a} \quad (2分) \text{ 又 } E(X) = \bar{X}$$

$$\therefore \hat{b}_{MLE} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-a} \quad \text{即 } \hat{b}_{MLE} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-a} \quad (3分)$$

$$\therefore H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad (2分)$$

$$(10分) \text{ 检验统计量 } F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \stackrel{H_0}{\sim} F(n_1-1, n_2-1) \quad (2分)$$

$$\therefore F_{0.025}(7, 6) = 5.7, \quad F_{0.975}(7, 6) = \frac{1}{5.12} = 0.1953 \quad (4分)$$

$$\therefore 0.1953 < \frac{1}{S_2^2} = 0.793 < 5.7$$

故接受  $H_0$ ，认为无显著性差异。(2分)

$$七. \because X \sim N(0, 2^2) \therefore \frac{X_i}{2} \sim N(0, 1) \quad i=1, \dots, 10. \quad (3分)$$

(15分) 且  $X_1, \dots, X_{10}$  独立

$$故 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 X_i \sim N(0, 5), \quad \frac{1}{2} \sum_{j=6}^{10} X_j \sim N(0, 5) \quad (3分)$$

$$且两者独立, \quad \frac{\sum_{i=1}^5 X_i}{2\sqrt{5}} \sim N(0, 1), \quad \frac{\sum_{j=6}^{10} X_j}{2\sqrt{5}} \sim N(0, 1) \quad (3分)$$

$$则 \frac{1}{20} \left( \left( \sum_{i=1}^5 X_i \right)^2 + \left( \sum_{j=6}^{10} X_j \right)^2 \right) \sim \chi^2(2). \quad (2分)$$

$$即 C = \frac{1}{20}, \quad n=2. \quad (2分)$$

$$八. 证明: E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-x} dx = n+1. \quad (1)$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} e^{-x} dx = (n+2)(n+1) \quad (1)$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n+1. \quad (1)$$

(由切比雪夫不等式可得)

$$\begin{aligned} P\{0 < X < 2(n+1)\} &= P\{|X - (n+1)| < n+1\} \\ &= P\{|X - E(X)| < n+1\} \\ &\geq 1 - \frac{D(X)}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

1

北京邮电大学 2004-2005 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (B) 标准答案

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\bar{X}, S^2$  分别是样本均值和样本方差, 则有  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ,  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$  (2 分).

2. 设总体  $X$  具有概率密度:  $f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases} X_1, X_2, \dots, X_n$

是来自总体  $X$  的样本, 则未知参数  $\theta$  的矩估计量是: \_\_\_\_\_

解 因为

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{\theta}^{+\infty} xe^{-(x-\theta)}d\theta = \theta + 1.$$

所以  $\theta$  的矩估计量是  $\hat{\theta} = \bar{X} - 1$  (4 分).

3. 对于单个正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  已知, 利用检验统计量:  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ , 可得检验问题:

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

( $\mu_0$  是已知常数) 的拒绝域 (取显著水平  $\alpha$ ) 是: \_\_\_\_\_

解 检验统计量:  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  (2 分), 拒绝域:  $|z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2}$  (2 分).

2

4. 设随机过程  $X(t) = A \cos t, t \in \mathbb{R}, A$  是随机变量, 其分布律为

$A$	2	4	8
$p_k$	0.4	0.4	0.2

则  $X(t)$  的一维分布函数  $F(x; \frac{\pi}{3}) =$  \_\_\_\_\_

解 因为

$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1\right\} = P\{A = 2\} = 0.4;$$

$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\right\} = P\{A = 4\} = 0.4;$$

$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\right\} = P\{A = 8\} = 0.2;$$

$$\text{所以 } F(x, \frac{\pi}{3}) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.4, & 1 \leq x < 2, \\ 0.8, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

5. 设明天是否有雨仅与今天的天气有关, 而与过去的天气无关. 设今天下雨而明天也下雨的概率是 0.7, 而今天无雨明天有雨的概率是 0.4. 设有雨的状态为 0, 没有雨的状态为 1, 则一步转移概率矩阵是:

\_\_\_\_\_ ; 如果今天有雨, 则后天有雨的概率是: \_\_\_\_\_

解 一步转移概率矩阵是:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

因为二步转移概率矩阵为

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

所以, 如果今天有雨, 则后天有雨的概率是: 0.61. (2 分)

3

6. 设  $U$  与  $V$  是相互独立的随机变量, 并且均值都是零, 方差都是 1, 则随机过程  $X(t) = U\cos t + V\sin t$  的均值函数是 \_\_\_\_\_ 自相关函数是: \_\_\_\_\_, 该随机过程是不是平稳随机过程 \_\_\_\_\_ (填是或否).

解 随机过程的均值函数和自相关函数分别是:

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] = E[U\cos t + V\sin t] \\ &= E[U]\cos t + E[V]\sin t = 0, \quad (1 \text{ 分}) \\ R_X(t+\tau, t) &= E\{[U\cos(t+\tau) + V\sin(t+\tau)][U\cos t + V\sin t]\} \\ &= E\{U^2\cos(t+\tau)\cos t + V^2\sin(t+\tau)\sin t\} \\ &\quad + E\{[UV]\cos(t+\tau)\sin t + \sin(t+\tau)\cos t\} \\ &= \cos \tau. \quad (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

该随机过程是平稳随机过程 (1 分).

4

二. 计算或证明题.

已知:  $F_{0.05}(3, 12) = 3.49$ ,  $F_{0.95}(2, 12) = 3.89$ ,  
 $t_{0.05}(19) = 1.7291$ ,  $t_{0.95}(20) = 1.7247$ .

1 (16 分) 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $X$  的样本, 求使得

$$\int_a^{+\infty} f(x; \mu, \sigma^2) dx = 0.05,$$

的点  $a$  的最大似然估计, 其中  $f(x; \mu, \sigma^2)$  表示总体  $X$  的密度函数. (注: 先求  $\mu$  和  $\sigma$  的最大似然估计.)

解 已知  $\mu, \sigma$  的最大似然估计为

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (4 \text{ 分})$$

因为

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x; \mu, \sigma^2) dx &= F(+\infty; \mu, \sigma^2) - F(a; \mu, \sigma^2) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 0.05.\end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

故  $\Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 0.95 = \Phi(1.645)$ , (2 分)

从而  $\frac{a - \mu}{\sigma} = 1.645$  (2 分), 故  $a = \mu + 1.645\sigma$  (2 分), 即  $a$  的最大似然估计为

$$\hat{a} = \hat{\mu} + 1.645\hat{\sigma}. \quad (2 \text{ 分})$$

5

2 (18 分). 下面是某工厂随机选取的 20 只部件的装配时间 (分)

9.8, 10.4, 10.6, 9.6, 9.7, 9.9, 10.9, 11.1, 9.6, 10.2,  
10.3, 9.6, 9.9, 11.2, 10.6, 9.8, 10.5, 10.1, 10.5, 9.7,

设装配时间总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  未知. 问可否认为装配时间均值  $\mu$  显著大于 10 ( $\alpha = 0.05$ )?

解 由题意作假设检验

$$H_0: \mu \leq 10, \quad H_1: \mu > 10, \quad (2 \text{ 分})$$

因为  $\alpha = 0.05$ , 这是右边检验, 因为  $\sigma$  未知, 由  $t$  检验法, 其拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - 10}{s/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1) \quad (2 \text{ 分})$$

现在  $n = 20$ ,  $t_{0.05}(19) = 1.7291$ , (2 分)

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(9.8 + 10.4 + 10.6 + 9.6 + 9.7 + \cdots + 9.7) = 10.2, \quad (2 \text{ 分})$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{19}[(9.8 - 10.2)^2 + (10.4 - 10.2)^2 + \cdots + (9.7 - 10.2)^2]} = 0.5099, \quad (2 \text{ 分})$$

知  $t$  的观察值为

$$t = \frac{10.2 - 10}{0.5099/\sqrt{20}} = 1.7541 > 1.7291, \quad (3 \text{ 分})$$

故在水平  $\alpha = 0.05$  下拒绝  $H_0$ , 即认为装配时间的均值显著地大于 10 (4 分).

6

3 (12 分). 已知马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的状态空间  $I = \{1, 2, 3, 4\}$ , 其初始分布和一步转移概率矩阵为

$$p_i = P\{X_0 = i\} = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

求 (1)  $a_1 = P\{X_2 = 4 | X_0 = 1, 1 < X_1 < 4\}$ ;

(2)  $a_2 = P\{X_2 = 4 | 1 < X_1 < 4\}$ .

解 因为: “ $1 < X_1 < 4$ ” = “ $X_1 = 2$ ”  $\cup$  “ $X_1 = 3$ ”, 故

$$a_1 = \frac{P(X_2 = 4, X_0 = 1, 1 < X_1 < 4)}{P(X_0 = 1, 1 < X_1 < 4)} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{P(X_2 = 4, X_1 = 2, X_0 = 1) + P(X_2 = 4, X_1 = 3, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1, X_1 = 2) + P(X_0 = 1, X_1 = 3)} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{p_{12}p_{24} + p_{13}p_{34}}{p_{12} + p_{13}} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{5}{16}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$a_2 = \frac{P(X_2 = 4, 1 < X_1 < 4)}{P(1 < X_1 < 4)} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{P(X_2 = 4, X_1 = 2) + P(X_2 = 4, X_1 = 3)}{P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3)} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{P(X_1 = 2) \cdot p_{24} + P(X_1 = 3) \cdot p_{34}}{\sum_{i=1}^4 P(X_0 = i)p_{i2} + \sum_{i=1}^4 P(X_0 = i)p_{i3}} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{7}{32} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{32} + \frac{1}{4}} = \frac{19}{60}. \quad (2 \text{ 分})$$



7

4 (18 分). 设有三台机器用来生产规格相同的铝合金薄板, 抽样测得薄板厚度 (单位: cm) 如下表

机器	薄板厚度				
$A_1$	0.236	0.238	0.248	0.245	0.243
$A_2$	0.257	0.253	0.255	0.254	0.261
$A_3$	0.258	0.264	0.259	0.267	0.262

试问在  $\alpha = 0.05$  下三台机器生产的铝合金薄板厚度是否有显著差异? 已知  $F_{0.05}(2, 12) = 3.89$ .

解 令  $X_{ij} (1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq 5)$  表示第  $i$  台机器所生产第  $j$  块铝合金薄板的厚度, 假定

$$X_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}, \quad 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq 5, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ 且相互独立} \quad (2 \text{ 分})$$

由题意, 要检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ 不全等} \quad (2 \text{ 分})$$

现在  $n_1 = n_2 = n_3 = 5, n = 15$ ,

$$T = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^5 x_{ij} = 3.8, \quad (2 \text{ 分})$$

$$S_T = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^5 x_{ij}^2 - \frac{T^2}{15} = 0.0639 - \frac{3.8^2}{15} = 0.00123, \quad (2 \text{ 分})$$

$$S_A = \sum_{j=1}^3 \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{15} = \frac{1}{5}(1.21^2 + 1.28^2 + 1.31^2) - \frac{3.8^2}{15} = 0.0011, \quad (2 \text{ 分})$$

$$S_E = S_T - S_A = 0.00013,$$

由此列方差分析表 (4 分)

方差来源	平方和	自由度	均分	F 比
因素	0.0011	2	0.00055	32.35
误差	0.00013	12	0.000011	
总和	0.00123	14		

对于  $\alpha = 0.05$ , 知  $F_{0.05}(3, 12) = 3.89$ , 故

$$F = 32.35 > F_{0.05}(3, 12) = 3.89, \quad (2 \text{ 分})$$

所以拒绝  $H_0$ , 认为三台机器生产的铝合金薄板厚度有显著差异. (2 分)

8

5 (12 分). 设  $\{X(t), t \in R\}$  是平稳随机过程. 令  $Y(t) = X(t+a) - X(t-a) (a > 0)$ . 记  $X(t), Y(t)$  的协方差和功率谱密度各为  $R_X(\tau), S_X(\omega)$  和  $R_Y(\tau), S_Y(\omega)$ . 试证

$$R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a),$$

$$S_Y(\omega) = 4S_X(\omega)\sin^2(a\omega).$$

解 因为

$$\begin{aligned} E[Y(t)Y(t-\tau)] &= E[X(t+a) - X(t-a)][X(t-\tau+a) - X(t-\tau-a)] \\ &= E[X(t+a)X(t-\tau+a)] - E[X(t+a)X(t-\tau-a)] \\ &\quad + E[X(t-a)X(t-\tau+a)] - E[X(t-a)X(t-\tau-a)] \\ &= R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) + R_X(\tau) \\ &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) \\ &= R_Y(\tau) \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

$$EY(t) = E[X(t+a) - X(t-a)] = m_X - m_X = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

所以  $Y(t)$  是平稳过程, 于是

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+2a)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-2a)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= S_X(\omega)(2 - e^{j2a\omega} - e^{-j2a\omega}) \\ &= S_X(\omega)(2 - 2\cos 2a\omega) = 4S_X(\omega)\sin^2 a\omega. \end{aligned} \quad (6 \text{ 分})$$

