

北京邮电大学 2020-2021 年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（4 学分，A 卷）

考试注意事项：

学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。
在解题过程中，你可能需要用到以下数据：

$\Phi(1.28) = 0.9$	$\Phi(1.645) = 0.95$	$\Phi(1.96) = 0.975$	$\Phi(2.33) = 0.99$
$t_{0.005}(9) = 3.2498$	$t_{0.005}(8) = 3.3554$	$t_{0.01}(9) = 2.8214$	$t_{0.01}(8) = 2.8965$
$t_{0.005}(18) = 2.8784$	$t_{0.005}(17) = 2.8982$	$t_{0.005}(16) = 2.9208$	$\sqrt{5} = 2.236$

一、填空选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B) = 0.5$ ， $P(A - B) = 0.3$ ，

则 $P(B - A) =$ _____。

2. 从数 1, 2, 3 中任取一个数，记为 X ，再从 1, 2, ..., X 中任取一个数，记为 Y 。

则 $P\{Y = 2\} =$ _____。

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，分别服从数学期望为 2 和 3 的泊松分布，

则 $P\{X + Y = 2\} =$ _____。

4. 设 $(X, Y) \sim N(1, 0, 4, 4, 0.5)$ ，则 $E[X(X - Y)] =$ _____。

5. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$ ，且 $\int_0^2 f(x)dx = 0.6$ ，

则 $P\{X < 0\} =$ _____。

6. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，

相关系数为 -0.5。则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X + Y| \geq 3\} \leq$ _____。

7. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$ ，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$ ， X_1, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, \dots, Y_{n_2} 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，

则 $E\left[\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2\right] =$ _____。

8. 设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知。以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n ）

中等于 i 的个数（ $i=1,2,3$ ），下述哪组常数 (a_1, a_2, a_3) 可以使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为参数 θ

的无偏估计量？_____。

- A. $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ C. $\left(\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right)$ D. $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0\right)$

9. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则_____。

- A. $X+Y$ 服从正态分布
B. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布
C. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布
D. X^2/Y^2 服从 F 分布

10. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，且 X 和 Y 相互独立。 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是取自正态总体 X 和 Y 的简单随机样本。 \bar{X} 和 \bar{Y} 分别是这两个样本的样本均值； S_1^2 和 S_2^2 分别是这两个样本的样本方差。则方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限为_____。

- A. $\frac{\bar{\sigma}_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)}$
B. $\frac{\bar{\sigma}_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)}$
C. $\frac{\bar{\sigma}_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)$
D. $\frac{\bar{\sigma}_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}$

二、(10 分)

设随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 是严格增函数，其反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在。试给出随机变量 $Y = F_X(X)$ 的概率密度函数。

三、(12 分)

学校共有 2000 名学生，学期初召开家长会。一个学生家长缺席、1 名家长、2 名家长来参加家长会的概率分别为 0.1、0.8、0.1，且各学生参加会议的家长数相互独立。请利用中心极限定理估计以下概率：

- (1) 参加会议的家长数 X 超过 2033 的概率；
- (2) 家长缺席家长会的学生数 Y 不多于 178 的概率。

四、(8 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量的联合分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表格中的空白处。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

说明：在答题纸上写出上表并补充填写数值。每填对 1 个数值，得 1 分，不需要给出计算过程。

五、(12 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立，均服从数学期望为 1 的指数分布。记

$$U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}.$$

- (1) 求 U 的概率密度函数 $f_U(u)$ ；
- (2) 求 V 的概率密度函数 $f_V(v)$ ；
- (3) 求 $E(U+V)$ 和 $E(UV)$ 。

六、(10 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$, 其中未知参数 $\beta > 1$ 。

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体的简单随机样本。求：

- (1) 参数 β 的矩估计量；
- (2) 参数 β 的极大似然估计量。

七、(8 分)

甲、乙两位高中同学一起参加了 9 门不同课程的考试。每次考试的满分都是 100 分，但考查知识点、题目难度等各不相同。得到的 9 对考试分数如下：

第 k 次考试	1	2	3	4	5	6	7	8	9
甲同学分数 x_k	92	93	80	97	78	94	90	88	96
乙同学分数 y_k	82	84	92	79	96	83	78	75	85
$d_k = x_k - y_k$	10	9	-12	18	-18	11	12	13	11

上述表格中的数据可以计算得到：

$$\bar{x} = 89.78, s_x = 6.72, \bar{y} = 83.78, s_y = 6.67, \bar{d} = 6, s_D = 12.27。$$

问：能否认为两位同学的成绩有显著的差异（取 $\alpha = 0.01$ ）？