

北京邮电大学 2022-2023 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(4 学分, B)

考试注意事项:

学生必须将答题内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效.

一、填空题与选择题 (每小题 4 分, 共 40 分)

1. 设 A, B 为两随机事件, 且 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$, $P(B|A) = 0.4$, 则

$$P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 一批电子产品由甲、乙、丙三个车间生产. 甲、乙、丙三个车间的产品件数分别占这批产品的 50%, 30% 和 20%, 甲、乙、丙三个车间的产品的良品率分别为 80%, 60% 和 50%, 从这批产品中任取一件, 在取出的产品为良品的条件下, 该产品是甲车间生产的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的泊松分布, Y 服从参数为 4 的泊松分布, 则 X 与 $X+Y$ 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $(X, Y) \sim N(1, 0, 1, 1, \frac{1}{4})$, 则 $P\{2X - Y > 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果用标准正态分布函数 $\Phi(z)$ 表示).

5. 设随机序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, X_1 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2}(2-x), 0 < x < 2, \text{ 则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 依概率收敛于 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 设总体 X 的分布律为 $P\{X=0\} = \theta$, $P\{X=1\} = \frac{1}{2} - \frac{2\theta}{3}$, $P\{X=2\} = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{3}$, 从该总体中抽样了一个样本, 并得样本均值为 $\bar{x} = 1.1$, 则参数 θ 的矩估计值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 A, B 为两事件, 且 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, 则下列命题中为假命题的是

A. 若 $P(B|A) = P(B)$, 则 $P(B|\bar{A}) = P(B)$.

B. 若 $P(B|A) > P(B)$, 则 $P(B|\bar{A}) > P(B)$.

C. 若 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则 $P(\bar{B}|A) = P(\bar{B}|\bar{A})$.

D. 若 $P(B|A) > P(A|B)$, 则 $P(A) < P(B)$.

8. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, 总体 X 的方差为 σ^2 , 则 σ^2 的无偏估计是

A $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

B $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

C $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

D $\frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

9. 从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本 x_1, x_2, \dots, x_n . \bar{x} , s 分别为样本均值和样本标准差, 则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

A. $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1))$

B. $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n))$

C. $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$

D. $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n))$

10. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 则 $T = \frac{(X_1 + X_2)^2}{X_3^2 + X_4^2}$ 的分布为

A. $F(1,1)$

B. $F(2,1)$

C. $F(1,2)$

D. $F(2,2)$

二 (10 分) 设 X 的分布律为 $P\{X=k\} = \frac{1}{5}$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$, 令 $Y = \cos(\frac{\pi}{2}X)$,

(1) 求 Y 的分布律及分布函数;

(2) X 与 Y 是否相互独立? 是否不相关?

三 (10 分) 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X > 2Y\}$, (2) 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的概率密度.

四 (10 分) 设随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求 $E(XY)$;

(2) 求 X 的边缘概率密度, 及 $X=x$ ($0 < x < 1$) 条件下 Y 的条件概率密度.

五(12分)设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, 总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad \text{其中 } \theta > 0 \text{ 为未知参数,}$$

- (1) 求 θ 的最大似然估计量;
- (2) θ 的最大似然估计量是否为 θ 的无偏估计?
- (3) 确定 a , 使得 $E(a\hat{\theta} - \theta)^2$ 最小, 其中 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计量.

六 (10分) 砖瓦厂有两座砖窑, 从甲、乙两窑生产的砖中各抽取 6 块砖, 测其抗折强度 (单位: kg), 并计算得样本均值和样本方差如下:

$$\text{甲窑: } \bar{x} = 36.3, \quad s_1^2 = 10.6$$

$$\text{乙窑: } \bar{y} = 41.8, \quad s_2^2 = 13.4$$

设甲、乙两砖窑的砖的抗折强度分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

- (1) 试检验假设: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ (检验水平 $\alpha = 0.1$);
- (2) 在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为甲、乙两窑的砖的抗折强度有显著差异.

$$F_{0.05}(5, 5) = 5.05, \quad t_{0.025}(10) = 2.228$$

七 (8分) 在合金钢的强度 y (单位: 10^7 Pa) 与合金钢碳含量 x (单位: %) 的研究中, 安排了 10 次试验, 得到数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 10)$, 并计算得

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 0.175, \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 48.125, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 0.018,$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2.3868, \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 345.06$$

- (1) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$;
- (2) 在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下, 检验回归方程的显著性, 即检验假设

$$H_0: b = 0, H_1: b \neq 0.$$

$$t_{0.0025}(24) = 2.64, \quad t_{0.05}(18) = 1.734, \quad F_{0.05}(9, 9) = 3.18, \quad F_{0.01}(1, 8) = 11.26$$