

## 北京邮电大学 2019--2020 学年第 2 学期

### 《概率论与数理统计》试题 (B 卷, 自动化学院用)

考试注意事项: 学生必须将答题内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效.

#### 一. 填空题与选择题 (每小题 4 分, 共 44 分)

1. 设事件  $A$  和  $B$  相互独立, 且  $P(A) = 0.5$ ,  $P(A - B) = 0.2$ , 则  $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 将 2 个球随机地放入 3 个盒子中, 3 个盒子分别编号为 1, 2, 3, 已知 2 个球放入了不同盒子中, 则 1 号盒子中有球的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ . (先确定常数  $a$ , 再计算  $D(X)$ )

4. 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(0, 4)$ ,  $Y$  的分布律为

$P\{Y = k\} = \frac{1}{2}$ ,  $k = 1, 2$ , 则  $P\{XY \leq 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$ . (用标准正态分布函数  $\Phi(z)$  表示结果)

5. 某种型号器件的寿命  $X$  (单位: 小时) 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \times 1000^3}{x^4}, & x > 1000, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

现有一大批这种器件, 从中任取 3 件,  $Y$  表示 3 件器件中其寿命大于 1500 小时的件数, 则  $E(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 设随机向量  $(X, Y)$  服从二维正态分布  $N(1, 1, 2, 8, 0.5)$ , 则  $E(XY) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 设随机变量  $X \sim N(-1, 1)$ , 则  $Y = 2X + 1 \sim$

(A)  $N(-1, 2)$

(B)  $N(-1, 4)$

(C)  $N(3, 2)$

(D)  $N(3, 4)$

8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\bar{X}, S^2$  为样本均值和样本方差,

则下列统计量中为  $\mu^2$  的无偏估计的是

- (A)  $\bar{X}^2$       (B)  $S^2$       (C)  $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$       (D)  $\bar{X}^2 + \frac{1}{n}S^2$

9. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $N(0, 1)$  的样本, 令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则下列统计量中不服从  $\chi^2$  分布的是

- (A)  $\bar{X}^2$       (B)  $n\bar{X}^2$       (C)  $\sum_{i=1}^n X_i^2$       (D)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

10. 从正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  中抽取容量为  $n$  的样本, 样本均值和样本标准差分别为

$\bar{x}, s$ , 则总体方差  $\sigma^2$  的置信水平为  $1-\alpha$  的置信区间为

- (A)  $(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}})$       (B)  $(\frac{\sqrt{ns}}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n)}}, \frac{\sqrt{ns}}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}})$   
(C)  $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$       (D)  $(\frac{ns^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{ns^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)})$

11. 设总体  $X$  的期望和方差分别为  $\mu$  和  $\sigma^2$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自该总体的样本,

则由中心极限定理, 当样本量  $n$  足够大时, 样本均值  $\bar{X}$  近似服从

- (A)  $N(\mu, \sigma^2)$       (B)  $N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$       (C)  $N(\frac{\mu}{n}, \sigma^2)$       (D)  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

**二(10分)** 设随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X=0\}=\frac{1}{2}, P\{X=-1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4}$ , 令

$$Y = X^2,$$

(1)求  $Y$  的分布律;

(2)  $X$  与  $Y$  是否不相关? 是否相互独立?

三(12 分) 设随机向量  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  上服从均匀分布, 令

$$X_1 = \begin{cases} 1, & X < 0, \\ 0, & X \geq 0, \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} 1, & X - Y < 0, \\ 0, & X - Y \geq 0, \end{cases}$$

求(1)  $(X_1, X_2)$  的分布律;

(2)  $X_1$  与  $X_2$  的相关系数.

四(12 分) 设随机变量  $X$  服从参数为 1 的指数分布, 在  $X = x (x > 0)$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} e^{-(y-x)}, & y > x, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求  $(X, Y)$  的概率密度;

(2) 求  $Y$  的概率密度;

(3) 求  $Z = Y - X$  的分布函数及概率密度.

五(12 分) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi\theta x}} e^{-\frac{\ln^2 x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本,

(1) 求  $\theta$  的最大似然估计量;

(2)  $\theta$  的最大似然估计量是否是  $\theta$  的无偏估计?

六、(10 分) 用两种方法 (A 和 B) 测定冰自  $-0.7^\circ\text{C}$  转变为  $0^\circ\text{C}$  的水的融化热 (单位: cal/g), 每种方法各测了 8 次, 由测得的数据得到样本均值和样本方差如下:

A 方法:  $\bar{x} = 80.02$ ,  $s_1^2 = 0.00052$ ,

B 方法:  $\bar{y} = 80.08$ ,  $s_2^2 = 0.00038$ ,

设 A 和 B 两种方法的测定结果分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,

(1) 试检验假设:  $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$      $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$  (显著性水平取  $\alpha = 0.1$ );

(2) 在显著水平  $\alpha = 0.05$  下,能否认为两种方法的测定结果的均值有显著差异?

$$(t_{0.025}(14) = 2.1448, F_{0.05}(7, 7) = 3.79)$$