

北京邮电大学 2021-2022 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(3 学分)

注意事项: (1) 不得使用计算器, 答题前先浏览一下试卷末尾处的“附注”; (2) 所有答题内容都需写在答题纸上, 包括填空题的答案(写清楚题号), 按线上考试要求拍照、以 PDF 格式上传.

一、填空题(每小题 4 分, 共 44 分)

1. 设 A, B 为随机事件, 且已知 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$, $P(A|B)=0.5$, 则

$$P(\bar{A}\bar{B}|A\cup B)=\underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设随机事件 A, B, C 相互独立, $P(A)=P(B)=0.6$, $P(C)=0.5$, 则 A, B, C 中至少有两个发生的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$, $Y \sim b(4, \frac{1}{4})$ 则 X 与 $X + \sqrt{2}Y$ 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x^2}{8}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的概率密度 $f_Z(z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 若 $P\{X > c\} = \frac{1}{9}$, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0, 1, 4, \frac{1}{2})$, 则 $P\{2X - Y > 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 总体 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=P\{X=1\}=P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1}{4}. \text{ 则当样本量 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 依概率收敛于 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

8. 从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 9 的样本, 样本均值为 $\bar{x}=10.52$, 样本标准差为 $s=1.50$, 则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 X_1, X_2, \dots, X_{18} 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 若统计量 $\frac{a(X_1 + X_2 + X_3)^2}{\sum_{i=4}^{18} X_i^2}$ 服从 F 分布, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设总体 X 服从参数为 3 的泊松分布, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 为来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i$, 则 $D(\bar{X}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. X_1, X_2, \dots, X_{200} 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, 则由中心极限定理可得, $P\{\sum_{i=1}^{200} X_i^2 > 180\}$ 的近似值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二(12 分) 随机变量 X 的所有可能取值为 $-1, 0, 1$, 且已知 $E(X) = 0$, $P\{X = -1\} = \frac{1}{4}$, 令

$Y = X^2$, (1) 求 X 的分布律; (2) 求 Y 的分布函数; (3) X 与 Y 是否不相关? 是否独立?

三(10 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & 1 < x < a, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求 (1) a ; (2) $Y = \frac{1}{X}$ 的概率密度; (3) X 的方差.

四(12 分) 设随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求 (1) $E(XY)$;

(2) 在 $X = x$ ($0 < x < 1$) 的条件下, Y 的条件概率密度;

(3) $Z = X + Y$ 的概率密度.

五(10 分) 为比较甲、乙两种电池的使用寿命, 对两种电池各取 8 个电池进行寿命试验, 由

试验结果计算得甲、乙两种电池的使用寿命的样本均值分别为 $\bar{x} = 100.6$ 和 $\bar{y} = 95.6$, 样

本方差分别为 $s_1^2 = 90.6$ 和 $s_2^2 = 151.4$. 假设甲、乙两种电池的使用寿命分别服从正态分布

$N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

(1) 检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 对 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; (检验水平取 $\alpha = 0.1$)

(2) 在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为甲种电池的平均寿命大于乙种电池的平均寿命?

六(12 分) 设总体 X 服从对数正态分布, 其概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{4}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计?

(3) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 的方差.

附注: $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $t_{0.025}(8) = 2.3$, $t_{0.05}(14) = 1.76$,

$F_{0.05}(7, 7) = 3.79$.