

北京邮电大学 2018—2019 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 A (4 学时)

考试注意事项: 学生必须将答案内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 40 分, 每小题 4 分)

1. 某阵地有甲、乙、丙三门炮, 三门炮的命中率分别为 $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$ 。现三门炮同时向同一目标发射一发炮弹, 结果有两发炮弹命中, 求此时甲炮发射命中的概率 $20/29$ 。

2. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则 $E(Xe^{2X}) =$ $2e^2$ 。

3. 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = k\} = \frac{a}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

则 $a =$ 1 。

4. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = -2) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 3) = b$ 。若 $EX = 0$, 则 $DX =$ $9/2$ 。

5. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$, 且相关系数 $\rho_{X,Y} = 1$, 则有 D。

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$

(B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

~~(B)~~ $P\{Y = -2X + 1\} = 1$
C

~~(C)~~ $P\{Y = 2X + 1\} = 1$
D

6. 设总体 X 服从参数为 2 的泊松分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本,

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛到 6。

7. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 令 $Y = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2}$, 则 Y 服从

$F(1, n-1)$ 分布。

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自参数为 λ 的泊松分布总体的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。若 $\frac{1}{2}\bar{X} + kS^2$ 为 λ 的无偏估计量, 则 $k = \frac{1}{2}$ 。

9. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, 则当 $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{1}{100}$ 时, 统计量 $X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$ 服从 χ^2 分布, 其自由度为 2。

10. 设总体 X 的方差 σ^2 已知, 根据来自 X 的容量为 n 的简单样本, 测得样本均值为 \bar{X} , 则 X 的数学期望的置信度近似等于 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]。$$

二、(8 分) 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

试求系数 A , $P\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\}$ 以及 $F(x)$ 。

解: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} dx = A \arcsin x \Big|_{-1}^1 = A\pi$, 得出 $A = \frac{1}{\pi}$,4 分

$$P\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \text{4 分}$$

三、(10 分)。设二维随机变量 (X, Y) 在抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 所围成的区域 G

上服从均匀分布。

求 (1) (X, Y) 的联合概率密度;

(2) X 与 Y 的边缘概率密度;

(3) 概率 $P(X+Y \geq 2)$.

解: (1) 联合概率密度为:

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G, \end{cases}$$

C 为常数, 则应有

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} C dy = 1, \dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以 $\frac{9}{2}C = 1$, 于是 $C = \frac{2}{9}$, 所以 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$$

(2) 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 有

$$f_X(x) = \int_{x^2}^{x+2} \frac{2}{9} dy = \frac{2}{9}(-x^2 + x + 2),$$

当 $x < -1$ 或 $x > 2$ 时, 有 $f_X(x) = 0$; 所以 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(-x^2 + x + 2), & -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

同理当 $0 \leq y \leq 1$ 时, 有 $f_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9} dx = \frac{4}{9}\sqrt{y}$;

当 $1 \leq y \leq 4$ 时, 有 $f_Y(y) = \int_{y-2}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9} dx = \frac{2}{9}(2 + \sqrt{y} - y)$ 所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{9}, & 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{2}{9}(2 + \sqrt{y} - y), & 1 \leq y \leq 4, \dots\dots 4 \text{ 分} \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$(3) \quad P(X+Y \geq 2) = \frac{2}{9} \left(\int_0^1 dx \int_{2-x}^{x+2} dy + \int_1^2 dx \int_{x_2}^{x+2} dy \right) = \frac{13}{27}. \dots\dots 2 \text{ 分}$$

四、(8 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 试求随机变量 $Z = X+Y$ 的方差。

解: (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由随机变量期望公式

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$$

可知

$$\begin{aligned} EZ = E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f(x,y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 2(x+y) dx \\ &= \int_0^1 (y^2 + 2y) dy = \frac{4}{3}, \dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} EZ^2 = E(X+Y)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)^2 f(x,y) dx dy = \int_0^1 dy 2(x^2 + 2xy + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left(2y + 2y^2 + \frac{3}{2}y^3 \right) dy = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$\text{由方差公式 } DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = \frac{11}{6} - \frac{16}{9} = \frac{1}{18}. \dots\dots 4 \text{ 分}$$

五、(10 分) 利用切比雪夫不等式和中心极限定理, 分别确定投掷一枚硬币的次数, 使得出现“正面”的频率在 0.4 与 0.6 之间的概率不少于 0.9, 其中 $\Phi(1.65) = 0.95$ 。

解：设 X 表示投掷硬币 n 次，出现“正面”的次数，则 $X \sim b\left(n, \frac{1}{2}\right)$

(1) 切比雪夫不等式确定 n 。 $EX = 0.5n, DX = 0.25n$ 。

次数 n 确定于条件 $P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} \geq 0.9$ 。

由切比雪夫不等式

$$\begin{aligned} P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} &= P\{0.4n < X < 0.6n\} = P\{|X - 0.5n| < 0.1n\} \\ &\geq 1 - \frac{0.25n}{(0.1n)^2} = 1 - \frac{25}{n} \end{aligned} \quad \text{.....3 分}$$

所以 $1 - \frac{25}{n} \geq 0.9$ ，即 $n \geq 250$ 。2 分

(2) 利用中心极限定理

次数 n 确定于条件 $P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} \geq 0.9$ 。

$$\begin{aligned} P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} &= P\{0.4n < X < 0.6n\} \\ &= P\left\{\frac{0.4n - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} < \frac{X - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} < \frac{0.6n - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right\} \\ &\geq P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{5} < \frac{X - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} < \frac{\sqrt{n}}{5}\right\} \quad \text{.....3 分} \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) - 1 \end{aligned}$$

所以 $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) - 1 \geq 0.9$ ，

即 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.65)$ 。

由此可见 $\frac{\sqrt{n}}{5} \geq 1.65$, 即 $n \geq 68.05$ 。故此时需投掷 68 次硬币。.....2 分

六、(10 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$)。 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数。求

- (1) θ 的矩估计;
- (2) θ 的最大似然估计。

解: (1) 由于

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta)dx = \int_0^1 \theta x dx + \int_1^2 (1 - \theta)x dx = \frac{3}{2} - \theta,$$

令 $\frac{3}{2} - \theta = \bar{X}$, 解得 $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$, 所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$ 。5 分

- (3) 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1 - \theta)^{n-N}, \text{.....2 分}$$

取对数

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta),$$

两边对 θ 求导数, 得

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta} \text{.....2 分}$$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$, 得 $\theta = \frac{N}{n}$, 所以 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$ 1 分

七、(8 分) 机器包装食盐, 假设每袋食盐的净重服从正态分布, 规定每袋标准质量为 500 克, 标准差不能超过 10 克。某天开工后, 为检查机器工作是否正常, 从装好的食盐中随机抽取 9 袋, 测其净重为 (单位: 克)

497, 507, 510, 475, 484, 524, 491, 515, 488。

问这天包装机器工作是否正常 ($\alpha = 0.05$) ?

附表:

$z_{0.025} = 1.96$	$\chi^2_{0.05}(4) = 9.488$
$z_{0.05} = 1.65$	$\chi^2_{0.95}(4) = 0.711$
$t_{0.025}(8) = 2.306$	$\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$
$t_{0.025}(15) = 2.13$	$\chi^2_{0.95}(5) = 1.145$

解: 先建立假设

$$H_0^1: \mu = 500, H_1^1: \mu \neq 500 \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

这里 $n = 500$, $\mu_0 = 500$ 。给定 $\alpha = 0.05$, 查附表 $t_{0.025}(8) = 2.306$ 。计算样本

$$\bar{x} = 499, s^2 = 257, t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = -0.187。由于 |t_0| = 0.187 < t_{0.025}(8) = 2.306, 故接受$$

H_0^1 , 即认为机器包装没有系统误差。.....2 分

再建立假设

$$H_0^2: \sigma \leq 10, H_1^2: \sigma > 10, \dots\dots 2 \text{ 分}$$

这里查附表 $\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$, 计算可得

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 20.56.$$

由于 $\chi_0^2 = 20.56 > \chi^2_{0.05}(8) = 15.507$, 故拒绝 $H_0^2: \sigma \leq 10$, 即认为机器工作稳定性不够。.....2 分

八、(6 分) 设 $g(x)$ 是正值不减函数, X 是连续型随机变量, 且 $E[g(X)]$ 存在, 证明

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)}, \text{ 其中 } a \in R。$$

证明：设 X 有密度函数 $f(x)$ ，于是

$$\begin{aligned} P\{X \geq a\} &= P\{g(X) \geq g(a)\} \\ &= \int_{g(X) \geq g(a)} f(x) dx \leq \int_{g(X) \geq g(a)} \frac{g(x)}{g(a)} \cdot f(x) dx \quad \text{.....每步 2 分} \\ &= \frac{1}{g(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \frac{E[g(X)]}{g(a)}. \end{aligned}$$