

北京邮电大学 2021-2022 第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(3 学分)

一、填空题（每小题 4 分，共 44 分）

1. 0.5

2. 0.6

3. 0.5

4. $f_z(z) = \begin{cases} \frac{3z^5}{32}, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

5. 2

6. 0.3085

7. $\frac{3}{2}$

8. (9.37, 11.67)

9. 5

10. 0.6

11. 0.8413

二(12 分)

解 (1) 由已知得

$$\begin{cases} P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{3}{4}, \\ -\frac{1}{4} + P\{X=1\} = 0, \end{cases}$$

解得 $P\{X=0\} = \frac{1}{2}$, $P\{X=1\} = \frac{1}{4}$

所以 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

……4 分

(2) Y 的分布律为

Y	0	1
P	1/2	1/2

于是得 Y 的分布函数为

$$F(y) = P\{Y \leq y\} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases} \quad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

(3) $E(X) = 0$, $E(XY) = E(X^3) = 0$, 所以

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$$

故 X 与 Y 不相关。

由于 $P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\} \neq P\{X = 0\}P\{Y = 0\}$, 故 X 与 Y 不独立。

$\cdots\cdots 4 \text{ 分}$

三(10 分)

解 (1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^a \frac{2}{x^2}dx = 2(1 - \frac{1}{a})$, 得 $a = 2$. $\cdots\cdots 3 \text{ 分}$

(2) $y = \frac{1}{x}$ 严格单调, 且反函数为 $x = \frac{1}{y}$, 所以 $Y = \frac{1}{X}$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$$(3) \quad E(X) = \int_1^2 x \cdot \frac{2}{x^2} dx = 2 \ln 2,$$

$$E(X^2) = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{x^2} dx = 2,$$

X 的方差为

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 4 \ln^2 2. \quad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

四(12 分)

解 (1) $E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dx dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= \frac{1}{3}. \quad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

(2) 当 $0 < x < 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2},$$

所以在 $X = x$ ($0 < x < 1$) 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{2x+1}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(3) $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx \\ &= \begin{cases} z^2, & 0 < z < 1, \\ z(2-z), & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

五(10 分)

解 (1) 该检验的拒绝域为

$$F \leq F_{0.95}(7,7) = \frac{1}{F_{0.05}(7,7)} = \frac{1}{3.79}, \text{ 或 } F \geq F_{0.05}(7,7) = 3.79,$$

其中检验统计量 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$, 由样本算得检验统计量的观测值为

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{90.6}{151.4} = 0.5984,$$

可见样本未落入拒绝域, 所以不拒绝原假设, 即可认为两总体方差无显著差异.

$\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 需检验假设:

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \quad H_1: \mu_1 > \mu_2$$

由 (1) 的结果, 可以认为两总体方差相等. 检验的拒绝域为

$$t \geq t_{0.05}(14) = 1.76,$$

其中检验统计量 $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$

由样本算得

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{100.6 - 95.6}{\sqrt{\frac{7 \times 90.6 + 7 \times 151.4}{14}} \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} = 0.9091,$$

易见 $t = 0.9091 < 1.76$, 即样本未落入拒绝域, 所以不拒绝原假设, 即在水平 $\alpha = 0.05$ 下, 不能认为甲种电池的平均使用寿命大于乙种电池的平均使用寿命.5 分

六(12 分)

解: (1) 似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \theta)^2} (x_1 \cdots x_n)^{-1} \end{aligned}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(4\pi) - \ln(x_1 \cdots x_n) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \theta)^2$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \theta) = 0,$$

得 $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 所以 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \quad E(\ln X) = \int_0^\infty \frac{\ln x}{2\sqrt{\pi}x} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{4}} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{t}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(t - \theta)^2}{4}} dt = \theta,$$

所以

$$E(\hat{\theta}) = E\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i\right\} = E(\ln X) = \theta,$$

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.4 分

$$(3) \quad E(\ln^2 X) = \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{2\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{4}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{t^2}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{4}} dt$$

$$= 2 + \theta^2,$$

$$D(\ln X) = E(\ln^2 X) - [E(\ln X)]^2 = 2,$$

所以

$$D(\hat{\theta}) = D\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i\right\} = \frac{1}{n} D(\ln X) = \frac{2}{n}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$