

北京邮电大学 2022—2023 学年第一学期

《概率论与数理统计》试题 (A 卷, 4 学时)

考试注意事项: 学生必须将答题内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效.

一. 填空题与选择题 (每小题 4 分, 共 40 分)

1. 设事件 A 和 B 相互独立, 且 $P(A) = 0.5$, $P(A - B) = 0.2$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.

2. 将 2 个球随机地放入 3 个盒子中, 3 个盒子分别编号为 1, 2, 3, 已知 2 个球放入了不同盒子中, 则 1 号盒子中有球的概率为 _____.

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $D(X) =$ _____. (先确定常数 a , 再计算 $D(X)$)

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 4)$, Y 的分布律为

$$P\{Y = k\} = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \quad \text{则 } P\{XY \leq 2\} = \text{_____}. \quad (\text{用标准正态分布函数 } \Phi(z) \text{ 表示结果})$$

5. 某种型号器件的寿命 X (单位: 小时) 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \times 1000^3}{x^4}, & x > 1000, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

现有一大批这种器件, 从中任取 3 件, Y 表示 3 件器件中其寿命大于 1500 小时的件数, 则 $E(Y) =$ _____.

6. 设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(1, 1, 2, 8, 0.5)$, 则 $E(XY) =$ _____.

7. 设随机变量 $X \sim N(-1, 1)$, 则 $Y = 2X + 1 \sim$

(A) $N(-1, 2)$

(B) $N(-1, 4)$

(C) $N(3, 2)$

(D) $N(3, 4)$

8. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, \bar{X}, S^2 为样本均值和样本方差, 则下列统计量中为 μ^2 的无偏估计的是

- (A) \bar{X}^2 (B) S^2 (C) $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$ (D) $\bar{X}^2 + \frac{1}{n}S^2$

9. 从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本, 样本均值和样本标准差分别为 \bar{x}, s , 则总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

- (A) $(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}})$ (B) $(\frac{\sqrt{ns}}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n)}}, \frac{\sqrt{ns}}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}})$
 (C) $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$ (D) $(\frac{ns^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{ns^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)})$

10. 设总体 X 的期望和方差分别为 μ 和 σ^2 , X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的样本, 则由中心极限定理, 当样本量 n 足够大时, 样本均值 \bar{X} 近似服从

- (A) $N(\mu, \sigma^2)$ (B) $N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$ (C) $N(\frac{\mu}{n}, \sigma^2)$ (D) $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

二(10 分) 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=0\}=\frac{1}{2}, P\{X=-1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4}$, 令

$$Y=X^2,$$

(1)求 Y 的分布律;

(2) X 与 Y 是否不相关? 是否相互独立?

三(10 分) 设随机向量 (X, Y) 在区域 $D=\{(x, y): x^2+y^2<1\}$ 上服从均匀分布, 令

$$X_1=\begin{cases} 1, & X<0, \\ 0, & X\geq 0, \end{cases} \quad X_2=\begin{cases} 1, & X-Y<0, \\ 0, & X-Y\geq 0, \end{cases}$$

求(1) (X_1, X_2) 的分布律;

(2) X_1 与 X_2 的相关系数.

四(10 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 在 $X = x(x > 0)$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} e^{-(y-x)}, & y > x, \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

- (1) 求 (X, Y) 的概率密度;
- (2) 求 Y 的概率密度;
- (3) 求 $Z = Y - X$ 的分布函数及概率密度.

五(12 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi\theta x}} e^{-\frac{\ln^2 x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本,

- (1) 求 θ 的最大似然估计量;
- (2) θ 的最大似然估计量是否是 θ 的无偏估计?

六、(10 分) 用两种方法 (A 和 B) 测定冰自 -0.7°C 转变为 0°C 的水的融化热 (单位: cal/g), 每种方法各测了 8 次, 由测得的数据得到样本均值和样本方差如下:

$$\text{A 方法: } \bar{x} = 80.02, \quad s_1^2 = 0.00052,$$

$$\text{B 方法: } \bar{y} = 80.08, \quad s_2^2 = 0.00038,$$

设 A 和 B 两种方法的测定结果分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

- (1) 试检验假设: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ (显著性水平取 $\alpha = 0.1$);
- (2) 在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为两种方法的测定结果的均值有显著差异?

七、(8 分)

为考察某种维尼纶纤维的耐水性能, 安排了一组试验, 测得其甲醇浓度 x 及相应的“缩醇化度” y 的数据如下:

x	18	20	22	24	26	28	30
y	26.8	28.3	28.7	28.9	29.7	30.1	31.2

经计算得: $\sum_{i=1}^7 x_i = 168$, $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 4144$, $\sum_{i=1}^7 y_i = 203.7$, $\sum_{i=1}^7 y_i^2 = 5939.57$,

$$\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 4924.4.$$

(1) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$;

(2) 对回归方程作显著性检验, 即检验假设 $H_0: b = 0$ $H_1: b \neq 0$ (水平取 $\alpha = 0.01$).

附: $t_{0.05}(14) = 1.76$, $t_{0.005}(5) = 4.0322$, $F_{0.01}(1, 5) = 16.3$

$$\chi_{0.025}^2(15) = 25, \chi_{0.975}^2(15) = 6.26, F_{0.05}(7, 7) = 3.79, t_{0.025}(14) = 2.1448$$