

## 北京邮电大学 2019-2020 学年第二学期

### 《概率论与数理统计》期末试题（3 学分）

**考试注意事项：**学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上  
一律无效。

#### 一、简答题（每题 4 分，共 40 分，需写出简单步骤）

1. 口袋中有 2 个白球，3 个红球，从中随机地一次取出 3 个球，求取出的 3 个球中至多有 2 个红球的概率。
2. 设随机变量  $X, Y$  相互独立同分布，服从正态分布  $N(-1, 1)$ ，求  $Z = 2X - Y$  的概率密度函数。
3. 已知随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布，且  $P\{X = 0\} = \frac{1}{2}$ ，求  $P\{X < 2\}$ 。
4. 设随机变量  $X, Y$  满足  $D(X) = 9$ ， $D(Y) = 16$ ，相关系数  $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$ 。求  $D(X + Y)$ 。
5. 将一枚硬币连掷 100 次，求正面出现次数大于 60 次的概率。  
(已知： $\Phi(2) = 0.9772$ ；当  $x > 4$  时， $\Phi(x) = 1$ )
6. 一箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80、10、10 件，现从中任取一件，且
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到 } i \text{ 等品,} \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3。$$
求  $X_1$  与  $X_2$  的相关系数  $\rho$ 。
7. 设  $X_1, X_2, \dots, X_6$  为来自正态总体  $N(0, 1)$  的简单随机样本，  
而  $Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$ ，求常数  $c$ ，使得随机变量  $cY$  服从  $\chi^2$  分布，并指出其自由度。
8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本，其中参数  $\mu, \sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 未知，求 (1)  $\mu$  的  $1 - \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 的置信区间长度  $L$ ；(2)  $E(L^2)$
9. 叙述在假设检验中，显著性水平  $\alpha$  的概率意义。
10. 设随机变量  $X \sim N(1, 1)$ ，且  $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )，

求  $x$ ，使得  $P\{|X - 1| < x\} = \alpha$ 。

## 二、证明题（前两题 3 分，后一题 4 分，共 10 分）

1. 设事件 A、B 满足  $0 < P(A) < 1$ ,  $P(B) > 0$ ,  $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ ,

证明事件 A 与 B 独立。

2. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为独立同分布的随机变量序列,  $E(X_i) = \mu$ ,  $D(X_i) = 8$ ,

$i = 1, 2, \dots, n$ 。设  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 证明不等式:  $P\{\mu - 4 < \bar{X} < \mu + 4\} \geq 1 - \frac{1}{2n}$ 。

3. 随机变量  $X$  服从标准正态分布, 即  $X \sim N(0, 1)$ , 设  $Y = g(X) = \int_{-\infty}^X e^{-\frac{u^2}{2}} du$ ,

证明: 随机变量  $Y$  在  $[0, \sqrt{2\pi}]$  上服从均匀分布。

## 三、计算题（共 10 分）

一大型设备在任意时长为  $t$  的时间内, 发生故障的次数  $N(t)$  服从参数为  $\lambda t$  的泊松分布, 求:

(1) 相继两次故障之间的时间间隔  $T$  的概率分布函数;

(2) 设备在无故障工作 8 个小时的情况下, 再无故障运行 8 个小时的概率。

## 四、计算题（共 10 分）

设二维随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度  $f(x, y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$

求 (1) 常数  $A$ ; (2) 概率  $P\{X > 2Y\}$ ; (3)  $X$  的数学期望  $E(X)$ ;

(4)  $Z = X + Y$  的概率密度。

## 五、计算题（共 10 分）

设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-1} x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$

其中  $\theta (> 1)$  是未知参数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是来自总体  $X$  的样本值。

求 (1)  $\theta$  的矩估计量;

(2)  $\theta$  的极大似然估计量  $\hat{\theta}_L$ ，并问  $\hat{\theta}_L$  是  $\theta$  的无偏估计吗？并证明你的结论。

## 六、计算题（共 10 分）

对 5 个正常人和 6 个矽肺病人分别测量肺活量，设正常人和矽肺病人的肺活量分别为

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，计算可得样本均值及样本方差如下：

正常人的肺活量： $\bar{x} = 2.8$ ， $S_1^2 = 0.05$ ，矽肺病人的肺活量： $\bar{y} = 2.5$ ， $S_2^2 = 0.10$ 。

(1) 检验  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ （显著性水平  $\alpha = 0.05$ ）；

(2) 求两类人群肺活量均值差  $\mu_1 - \mu_2$  置信度  $1 - \alpha$  的置信区间。

$$(F_{0.05}(5, 6) = 4.39, F_{0.025}(5, 4) = 9.36, F_{0.025}(4, 5) = 7.39,$$

$$t_{0.05}(11) = 1.7959, t_{0.025}(11) = 2.2010, t_{0.025}(9) = 2.2622)$$

## 七、计算题（共 10 分）

一批同型号的枪，其中一半由甲厂生产，另一半由乙厂生产。一射击手用甲厂生产的枪射击时的命中率为  $p_1$ ，用乙厂生产的枪射击时的命中率为  $p_2$ ， $p_1 \neq p_2$ 。射击手要用其中的枪射击两次，现有两种选择：第一种选择是从这批枪中任取一支，然后射击两次；第二种选择是先从这批枪中任取一支，射击一次，把枪放回再从这批枪中任取一支射击一次。用  $X, Y$  分别表示第一、二种选择下的射击命中次数。

(1) 求  $X$  的期望与方差、 $Y$  的期望与方差，并比较  $X, Y$  的期望、方差的大小。

(2)  $A$  表示事件“第一次射击命中”， $B$  表示事件“第二次射击命中”，在第一种选择下， $A$  与  $B$  是否独立？证明你的结论。