

北京邮电大学 2020-2021 年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（4 学分，A 卷）

参 考 答 案

一、填空选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5
0.2	$\frac{5}{18}$	$\frac{25}{2} \times e^{-5}, 12.5e^{-5}, \frac{25}{2e^5}$	3	0.2
6	7	8	9	10
$\frac{1}{3}$	$(n_1 + n_2 - 2)\sigma^2$	B	B	B

二、(10 分)

设随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 是严格增函数，其反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在。试给出随机变量 $Y = F_X(X)$ 的概率密度函数。

解答：由分布函数的有界性可知， $Y = F_X(X)$ 是在区间 $(0,1)$ 上取值的随机变量。

所以，当 $y \leq 0$ 时， $F_Y(y) = 0$ ；当 $y \geq 1$ 时， $F_Y(y) = 1$ 。…… 4 分

当 $0 < y < 1$ 时，

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{F_X(X) \leq y\} = P\{X \leq F_X^{-1}(y)\} = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

综上， $Y \sim U(0,1)$ 。…… 4 分

因此 $Y = F_X(X)$ 的概率密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

…… 2 分

三、(12 分)

学校共有 2000 名学生，学期初召开家长会。一个学生家长缺席、1 名家长、2 名家长来参加家长会的概率分别为 0.1、0.8、0.1，且各学生参加会议的家长数相互独立。请利用中心极限定理估计以下概率：

- (1) 参加会议的家长数 X 超过 2033 的概率；
- (2) 家长缺席家长会的学生数 Y 不多于 178 的概率。

解答：(1) 记第 k 个学生参加会议的家长数为 X_k ，则 $X = \sum_{k=1}^{2000} X_k$ 。

由题意 X_k 的分布律为：

X_k	0	1	2
$p_{k,i}$	0.1	0.8	0.1

易得： $E(X_k) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.8 + 2 \times 0.1 = 1$ ； $E(X_k^2) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.8 + 2^2 \times 0.1 = 1.2$ ，

$D(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 0.2$ 。…… 4 分

由独立同分布下的中心极限定理（林德伯格-勒维中心极限定理）可知：

$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(2000 \times 1, 2000 \times 0.2)$ ，即 $X \overset{\text{近似}}{\sim} N(2000, 400)$ 。…… 2 分

于是

$$\begin{aligned} P\{X > 2033\} &= P\left\{\frac{X - 2000}{\sqrt{400}} > \frac{2033 - 2000}{\sqrt{400}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - 2000}{20} \leq 1.65\right\} \approx 1 - \Phi(1.645) = 0.05 \end{aligned}$$

可见，参加会议的家长数 X 超过 2033 的概率为 0.05。…… 2 分

(2) 由题意， Y 为没有家长来参加家长会的学生数，则 $Y \sim b(2000, 0.1)$ 。由

棣莫佛—拉普拉斯中心极限定理可知： $Y \overset{\text{近似}}{\sim} N(2000 \times 0.1, 2000 \times 0.1 \times 0.9)$ ，即
 $Y \overset{\text{近似}}{\sim} N(200, 180)$ 。…… 2 分

于是

$$\begin{aligned} P\{Y \leq 178\} &= P\left\{\frac{Y - 200}{\sqrt{180}} \leq \frac{178 - 200}{\sqrt{180}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{Y - 200}{13.42} \leq -1.64\right\} \approx \Phi(-1.645) = 1 - \Phi(1.645) = 0.05 \end{aligned}$$

可见，没有家长来参加家长会的学生数不多于 178 的概率为 0.05。

…… 2 分

四、(8 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 下表列出了二维随机变量的联合分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律中的部分数值, 试将其余数值填入表格中的空白处。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

说明: 在答题纸上写出上表并补充填写数值。每填对 1 个数值, 得 1 分, 不需要给出计算过程。

评分细则: 每填对 1 个数值, 得 1 分。

解答:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

五、(12 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 均服从数学期望为 1 的指数分布。记

$$U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}。$$

- (1) 求 U 的概率密度函数 $f_U(u)$;
- (2) 求 V 的概率密度函数 $f_V(v)$;
- (3) 求 $E(U+V)$ 和 $E(UV)$ 。

解答：(1) 因为 X 和 Y 均服从数学期望为 1 的指数分布，它们的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

则 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_U(u) = F^2(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u})^2, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

..... 2 分

故 $U = \max\{X, Y\}$ 的概率密度函数为 $f_U(u) = F'_U(u) = \begin{cases} 2(1 - e^{-u})e^{-u}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$ 。

..... 2 分

(2) 同理， $V = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2v}, & v > 0 \\ 0, & v \leq 0 \end{cases}$$

故 $V = \min\{X, Y\}$ 的概率密度函数为 $f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2v}, & v > 0 \\ 0, & v \leq 0 \end{cases}$ 。

..... 4 分

(3) 注意到 $U + V = \max\{X, Y\} + \min\{X, Y\} = X + Y$,

故 $E(U + V) = E(X + Y) = 2$ 。

..... 2 分

同理 $UV = \max\{X, Y\} \min\{X, Y\} = XY$, $E(UV) = E(XY) = E(X)E(Y) = 1$ 。

..... 2 分

六、(10 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$ ，其中未知参数 $\beta > 1$ 。

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体的简单随机样本。求：

(1) 参数 β 的矩估计量；

(2) 参数 β 的极大似然估计量。

解答：由题意知 X 的概率密度函数为 $f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$ 。 2 分

(1) 求矩估计量。

$$\text{总体的期望为 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x; \beta) dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{\beta}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\beta}{\beta-1}。$$

样本均值 \bar{X} 是总体期望 $E(X)$ 的无偏估计，故 $\bar{X} \approx E(X)$ 。 2 分

$$\text{令 } \frac{\beta}{\beta-1} \approx \bar{X}, \text{ 解得 } \beta \approx \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}。$$

所以参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$ 。 2 分

(2) 求极大似然估计量。

$$\text{似然函数为 } L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i > 1 (i=1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

..... 2 分

当 $x_i > 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 时， $L(\beta) > 0$ ，取对数得

$$\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i。$$

两边对 β 求导，得 $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i。$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = 0, \text{ 可得 } \beta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}。$$

所以参数 β 的极大似然估计量为 $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$ 。 2 分

七、(8 分)

甲、乙两位高中同学一起参加了 9 门不同课程的考试。每次考试的满分都是 100 分，但考查知识点、题目难度等各不相同。得到的 9 对考试分数如下：

第 k 次考试	1	2	3	4	5	6	7	8	9
甲同学分数 x_k	92	93	80	97	78	94	90	88	96
乙同学分数 y_k	82	84	92	79	96	83	78	75	85
$d_k = x_k - y_k$	10	9	-12	18	-18	11	12	13	11

上述表格中的数据可以计算得到：

$$\bar{x} = 89.78, s_x = 6.72, \bar{y} = 83.78, s_y = 6.67, \bar{d} = 6, s_D = 12.27。$$

问：能否认为两位同学的成绩有显著的差异（取 $\alpha = 0.01$ ）？

解答：设 $D_k = X_k - Y_k$ ($k=1,2,\dots,9$) 是来自正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本， μ_D 和 σ_D^2 均未知。根据题意，需要检验的原假设和备择假设分别为：

$$H_0: \mu_D = 0, H_1: \mu_D \neq 0$$

…… 2 分

$$\text{检验统计量为： } t = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)。$$

$$\text{拒绝域为： } |t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(8) = 3.3554。$$

…… 3 分

将数据 $\bar{d} = 6$ 和 $s_D = 12.27$ 带入检验统计量，得到观察值为：

$$t = \frac{6}{12.27/\sqrt{9}} = 1.467 < 3.3554。$$

可见观察值不落在拒绝域内。

…… 2 分

故接受 H_0 ，认为两位同学的成绩并无显著差异。

…… 1 分