

北京邮电大学 2021-2022 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(4 学分)

注意事项: (1) 不得使用计算器, 答题前先浏览一下试卷末尾处的“附注”; (2) 所有答题内容都需写在答题纸上, 包括填空题的答案(写清楚题号), 按线上考试要求拍照、以 PDF 格式上传.

一、填空题(每小题 4 分, 共 40 分)

1. 设 A, B 为随机事件, 且已知 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$, $P(A-B)=0.4$, 则

$$P(\bar{B}A | A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$, $Y \sim b(3, \frac{2}{3})$ 则 $E(X(X+Y)) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 若 $P\{X > a\} = \frac{1}{16}$, 则

$$a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ Y 服从区间

$(0, 2)$ 上的均匀分布, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的概率密度为 $f_Z(z) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球. 令 X, Y 分别表示从甲盒和从乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 X_1, X_2, \dots, X_{50} 为来自总体 X 的简单随机样本, 总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{4}, & -2 < x < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 则利用中心极限定理可得 } P\{|\sum_{i=1}^{50} X_i| \leq 5\} \text{ 的近似值}$$

为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

7. 从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 11 的样本, 样本方差为 $s^2 = 8.46$, 则 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}.$ (计算结果保留三位小数)

8. 设 X_1, X_2, \dots, X_{16} 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题: $H_0: \mu \leq 10$,

$H_1: \mu > 10$. 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} > 11\}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, 则当 $\mu = 11.5$ 时,

该检验犯第二类错误的概率为_____.

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, \bar{X}, S^2 分别为样本均值和

样本方差, 则统计量 ① $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}$, ② $\frac{\sqrt{n-1}\bar{X}}{S}$, ③ $\frac{(n-1)\bar{X}^2}{S^2}$, ④ $\frac{n\bar{X}^2}{S^2}$ 中服从 F 分布的是_____. (填写正确结论的编号)

10. 设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0, 1, 4, -\frac{1}{2})$, 则随机变量 ① $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$,

② $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$, ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$, ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$ 中服从标准正态分布且与 X 独立的是_____. (填写正确结论的编号)

二(12 分) 设随机变量 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2$, 且已知 $E(X) = 1, P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$, 令

$Y = (X-1)^2$, (1) 求 X 的分布律; (2) 求 Y 的分布函数; (3) X 与 Y 是否不相关? 是否独立?

三(10 分) 一批同类型的电子元件由甲、乙两工厂生产, 且两厂所占份额相同, 已知甲、乙

两厂生产的电子元件的寿命(单位: 年)分别服从均值为 1 和 $\frac{1}{2}$ 的指数分布. 现从这批电子元件中任取一只安装在机器上, 任取的电子元件的寿命记为 X ,

(1) 求 X 的分布函数及概率密度;

(2) 若该电子元件使用了 1 年还未失效, 分别求该电子元件是甲工厂、乙工厂生产的概率, 并比较这两个概率的大小.

四(12 分) 设随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 < x < 2, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

求 (1) $E(XY)$; (2) 在 $Y = y$ ($0 < y < 2$) 的条件下, X 的条件概率密度;

(3) $Z = X + Y$ 的概率密度.

五(8 分) 有甲、乙两台机器生产同类型的金属部件, 分别在两台机器所生产的部件中各取一

容量为 18 的样本, 测量部件重量(单位: kg), 并算得甲、乙两台机器生产的金属部件重量的样本均值分别为 $\bar{x} = 50.6$ 和 $\bar{y} = 52.6$, 样本方差分别为 $s_1^2 = 12.4$ 和 $s_2^2 = 19.6$. 假设甲、

乙两台机器生产的金属部件的重量分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

- (1)在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下,检验假设 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ 对 $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$;
- (2)在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下,能否认为甲机器生产的金属部件的平均重量小于乙机器生产的金属部件的平均重量?

六(10 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本.

- (1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;
- (2) θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计?

七(8 分) 以 x 和 y 分别表示成年人的脚长和手长,测量了 10 名成年人的脚长和手长,得结

果 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 10)$, 并算得: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 92.70$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 861.9375$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 68.30$,

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 466.6875, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 633.6875.$$

- (1) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$; (\hat{a} , \hat{b} 的计算结果保留四位小数)
- (2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设 $H_0: b = 0$ 对 $H_1: b \neq 0$. (水平取 $\alpha = 0.05$)

附注: $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$,

$$t_{0.05}(34) = 1.691, \quad \chi_{0.975}^2(10) = 3.247, \quad \chi_{0.025}^2(10) = 20.483,$$

$$F_{0.025}(17, 17) = 2.72, \quad F_{0.05}(1, 8) = 5.32, \quad t_{0.025}(8) = 2.306.$$