离散数学期末考试

2007年元月8日

1. (6分) 已知 $A=\{\{a\},a,b\}$, $B=\{\{b\}, a\}$, 求 $A\times B$, $A\oplus B$, $P(A)$.

解: $A\times B=\{(\{a\},\{b\}), (\{a\},a), (a, \{b\}), (a, a), (b, \{b\}), (b, a)\}$

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{\{a\}, b, \{b\}\}$

$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, a, b, \{\{a\}, a\}, \{\{a\},b\}, \{a,b\}, A\}$.

2. (4分) 已知R_1,R_2是A上的对称关系, $R_1 \circ R_2$对称吗? 证明或举反例说明.

解: 一般地, $R_1 \circ R_2 \neq R_1 \circ R_2$.

反例: $R1=\{(1,3), (3,1)\}$ **对称!**

$R2=\{(3,2), (2,3)\}$ **对称!**

$R_1 \circ R_2 =\{(1,2)\}$ **不对称!**

3. (6分) G是一个群, H是G的子群. $\forall g_1,g_2 \in G$, $(g_1,g_2) \in R \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in H$. 证明R是G上等价关系.

证明:

◆对于任意的$a \in G$, $\because a\cdot a^{-1}=e \in H$,

$\therefore (a,a) \in R$, 故R是自反的。

◆对于任意的a, $b \in G$, 若$(a,b) \in R$,

$\therefore a\cdot b^{-1} \in H$, $\therefore (a\cdot b^{-1})^{-1}=b\cdot a^{-1} \in H$,

$\therefore (b,a) \in R$, 故R是对称的。

◆对于任意的$a,b,c \in G$, 若$(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$,

$\therefore a\cdot b^{-1} \in H$且 $b\cdot c^{-1} \in H$,

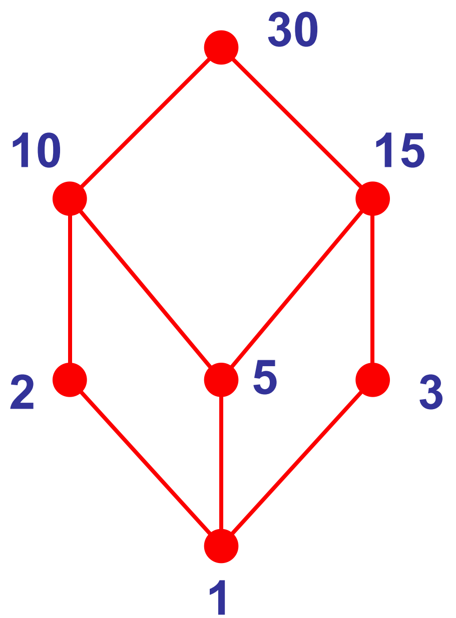
$\therefore (a\cdot b^{-1})\cdot(b\cdot c^{-1})=a\cdot c^{-1} \in H$,

$\therefore (a,c) \in R$, 故R是传递的。

4. (6分) A={1,2,3,5,10,15,30}, $\forall x,y\in A$, $x\preceq y \Leftrightarrow x|y$.

(1) 画出(A, $\preceq$)的哈斯图

(2) 判断(A, $\preceq$)是格否?分配格吗?有补格?布尔格吗?



格? ✓

分配格? ✓?

有补格? ✗

布尔格 ✗

5. 已知 $f: A \to B$, $g: B \to C$, f是单射,g是单射,证明 $g \circ f$ 是单射. 若 $g \circ f$ 是满射,证明g是满射.

证明: (1) 对于任意的 $x_1, x_2 \in A$, 若 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$,

即有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

由于g是单射,故有 $f(x_1) = f(x_2)$.

由于f是单射,故有 $x_1 = x_2$.

因而, $g \circ f$ 是单射.

(2) 对于任意 $z \in C$, 存在 $x \in A$, 使得

$g \circ f(x) = z$,

即 $g(f(x)) = z$.

故存在 $y = f(x) \in B$, 使得

$g(y) = z$.

故 g是满射.

6. (4分) 已知**: A**是可数无限集，**B**是有限集，且$A \cap B = \varnothing$，

求证：$|A| = |A \cup B|$

证明**:** 不妨记

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$$

作映射 $\varphi: A \to A \cup B$

$$\varphi(a_i) = b_i \quad (i=1,\ldots,m)$$

$$\varphi(a_i) = a_{i-m} \quad (i=m+1, m+2, \ldots)$$

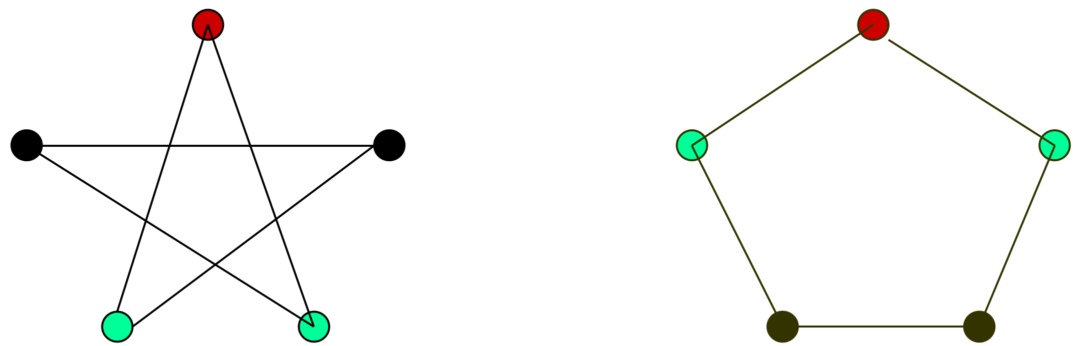
则可以说明φ为$A \to A \cup B$的双射，

故结论得证。

(如果只用一句话说，$A \cup B$也是可数无限集，可以得2分)

7. (5分) 画出**5**个顶点的自互补图。证明当**n=4k** 或**4k+1**时才有**.** 若一个图和它的补图同构，说它是自互补图。

解：(1)



(2) 因为n个顶点的无向完全图有n(n-1)/2个边，所以自互补图各有n(n-1)/4个边，因此，n=4k或4k+1。

8. (5分) 证明: G或者$\overline{G}$有一个是连通图。

证明：因为G不连通，则G可以分为若干连通子图:

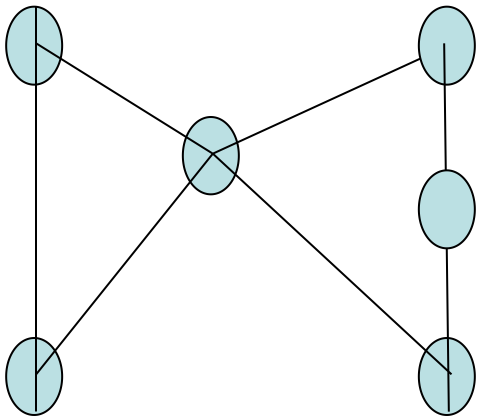
G1=（V1，E1），---，Gn=（Vn，En）

根据G的补图的构造过程知V1中每个顶点与其它顶点集V2，---，Vn中顶点有边相连。这样，在G的补图中，有

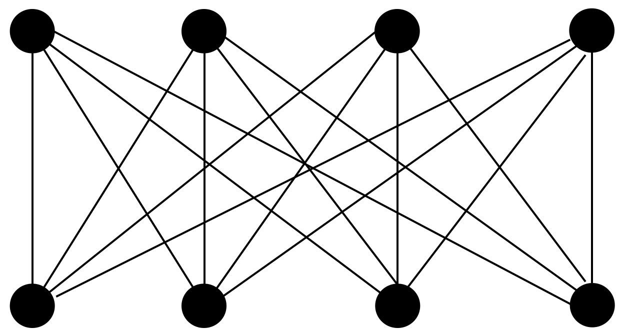
- 分别属于两个顶点子集Vi与Vj中的任意两个顶点之间有边直接相连,
- 属于同一个顶点子集Vi的任意两个顶点借助顶点子集Vj的任意一个顶点连通。

所以，根据连通的定义知：G的补图一定连通 。

9. (4分) 一个有奇数条边、偶数个顶点的欧拉图，但不是哈密尔顿图。



10 (6分) 画出$K_{4,4}$，判断$K_{4,4}$是否平面图.



否!

11. (5分) 证明: 多于一个顶点的树，至少有两片树叶。

证明：设 **T=(V,E)**是一棵树，若**T**中最多只有一片树叶，则有

$$\sum d(v) \geq 1+2(|V|-1)=2|E|+1,$$

这与结论 $\sum d(v) = 2|E|$ 矛盾! 矛盾说明 **T** 不止一片树叶。

12. (8分) (G, ·)是一个群， 取定$u \in G$. $\forall g_1, g_2 \in G$， 定义：

$$g_1 * g_2 = g_1 \cdot u^{-1} \cdot g_2.$$ **证明: (G,*)是群。**

证明: **(1)** 封闭性

(2) 可以结合性

(3) 幺元 $e_* = u$.

事实上, $g * e_* = g * u = g \cdot u^{-1} \cdot u = g \cdot e = g$

$e_* * g = u * g = u \cdot u^{-1} \cdot g = e \cdot g = g$

(4) 逆元

对于$\forall g \in G$, 在代数运算*下的逆元记为g_*^{-1}

于是,

$$g_*^{-1} = u \cdot g^{-1} \cdot u$$

这里, g^{-1}是在代数运算·下的逆元

13. (5分) G是一个群,H,K是G正规子群.
证明: H∩K是G正规子群.

证明: (1) (3分)

$\forall$a,b$\in$ H$\cap$K,就有a,b$\in$ H, a,b$\in$ K,
因为H, K是群G的子群,
所以，$a*b^{-1}\in H$，$a*b^{-1}\in K$，因此$a*b^{-1}\in H\cap K$。故 H$\cap$K是G的子群。

(2) (2分)

对于$\forall$a$\in$ H$\cap$K, $\forall$ g$\in$G, 就有a$\in$ H，a$\in$K。

因为H，K是群G的正规子群，所以

g*a*g-1$\in$H,

g*a*g-1$\in$K,

从而有g*a*g-1$\in$H$\cap$K,

故H$\cap$K是G的正规子群。

14. (4分) 已知(G, *)，(A, △)是两个群，f: G→A是群同态的。

证明: (1) $f(e_G)=e_A$ ($e_G \in G$是幺元, $e_A \in A$是幺元).

(2) $\forall g \in G$, $f(g^{-1})=(f(g))^{-1}$.

证明: (1) $f(e_G * e_G) = f(e_G)$,

又$f(e_G * e_G) = f(e_G) \triangle f(e_G)$，所以

$f(e_G) \triangle f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) = f(e_G) \triangle e_A$,

根据群的左消去律, 有 $f(e_G) = e_A$。

(2) 对于任意的$g \in G$，$f(g * g^{-1}) = f(g) \triangle f(g^{-1})$,

又$f(g * g^{-1}) = f(e_G) = e_A$，所以

$f(g) \triangle f(g^{-1}) = e_A = f(g) \triangle (f(g))^{-1}$,

由左消去律，$f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$。

15. (4分) 下列哪些是循环群:

(1) (Z, +) ✓

(2) (N, +) ✗

(3) (Q, +) ✗

(4) (Z6, ⊕) ✓

16. (4分) 试证明联结词集合{¬，→}是完备的。

证明: $P\vee Q = \neg P \to Q$

$P\wedge Q=\neg(\neg P \vee \neg Q)$

$P\leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

即{¬, ∨, ∧, →, ↔}可以用{¬, →}表示出来.

所以任何公式α均可以由集合{¬, →}中的联结词表达出来的公式与之等价。

故集合{¬, →}是完备的。

17. (4分) 试求公式 $(\neg\neg p\wedge q)\to((q\to r)\leftrightarrow\neg p)$的主析取范式和主合取范式.

解: $(\neg\neg p\wedge q)\to((q\to r)\leftrightarrow\neg p)$

$= (p\wedge q)\to((\neg q\vee r)\leftrightarrow\neg p)$

$= (p\wedge q)\to(((\neg q\vee r)\wedge\neg p)\vee(\neg(\neg q\vee r)\wedge\neg\neg p))$

$= (p\wedge q)\to((\neg q\wedge\neg p)\vee(r\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg r)\wedge p))$

$= \neg p\vee\neg q\vee(\neg q\wedge\neg p)\vee(r\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg r\wedge p)$

$= \neg p\vee\neg q\vee(q\wedge\neg r\wedge p)$

$= (\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$=\sum(0,1,2,3,4,5,6)$

$=\prod(7)=\neg p\vee\neg q\vee\neg r$

18. (6分) 将下列语句化为含有量词的谓词演算公式

(1) 不是每个人都能干,但一定有人能干.

(2) 有一种气体可以腐蚀任何金属.

(3) 凡是对顶角一定相等.

解:

(1) $(\neg \forall x(P(x) \rightarrow A(x))) \land (\exists x(P(x) \land A(x))$

(2) $\exists x(G(x) \land (\forall y(M(y) \rightarrow R(x,y)))$

(3) $\forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow (x=y))$

19. (5分) 已知公理 **A: $(p\to q)\to((q\to p)\to(p\leftrightarrow q))$**

B: $p\to p\vee q$

C: $p\to p$

D: $(p\to r)\to((q\to r)\to((p\vee q)\to r))$

E: $p\wedge q\to p$

证明定理: $p\leftrightarrow(p\vee p)$

证明:

(1)	$p\to p\vee q$	公理B
(2)	$p\to p\vee p$	代入
(3)	$(p\to r)\to((q\to r)\to((p\vee q)\to r))$	公理D
(4)	$(p\to p)\to((p\to p)\to((p\vee p)\to p))$	代入
(5)	$p\to p$	公理C
(6)	$(p\to p)\to((p\vee p)\to p)$	(4)(5)分离
(7)	$(p\vee p)\to p$	(5)(6)分离
(8)	$(p\to q)\to((q\to p)\to(p\leftrightarrow q))$	公理A
(9)	$(p\to(p\vee p))\to(((p\vee p)\to p)\to(p\leftrightarrow(p\vee p)))$	代入
(10)	$((p\vee p)\to p)\to(p\leftrightarrow(p\vee p))$	(2)(9)分离
(11)	$(p\leftrightarrow(p\vee p))$	(7)(10)分离

20. (5分) 试求公式 $\exists x(\neg(\forall y X(x,y)) \to (\exists z Y(z) \land Z(x))$

解：原式= $\exists x \forall y X(x,y) \lor (\exists z Y(z) \land Z(x))$

$= \exists x \forall y \exists z (X(x,y) \lor (Y(z) \land Z(x))$